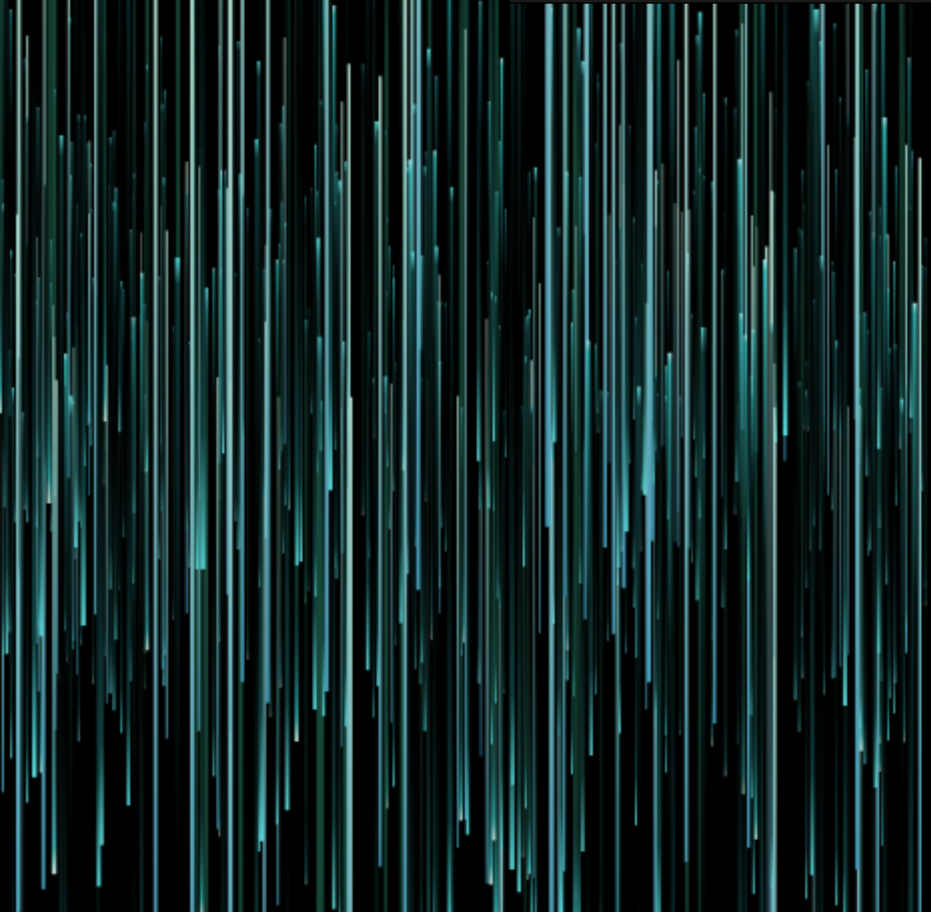
ISSN 2954-4971



TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

16 • 03

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 16, No. 3, Noviembre de 2024) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel.: 55-5849-6709
Email: smm@smm.org.mx
Sitio web: https://www.smm.org.mx
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2024, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
https://www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Noviembre de 2024

Índice general

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2024, Número 3

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribui-

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

do a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido en el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos estatales.
- Concurso nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos a partir del 1.º de agosto de 2005. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2024-2025 y, para el 1.º de julio de 2025, no haber iniciado estudios universitarios. Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizó del 4 al 9 de noviembre de 2024 en Oaxtepec, Morelos. A los primeros lugares de este certamen se les invitó a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2024 y hasta la fecha de la celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la 37.ª Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 66.ª Olimpiada Internacional de Matemáticas (a celebrarse en Australia en julio de 2025) y a la 40.ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (la cual se llevará a cabo en septiembre de 2025).

De entre los concursantes nacidos en 2009 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la 17.ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (a celebrarse en junio de 2025).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la 13.ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) la cual se llevará cabo en Kosovo en abril de 2025.

Lemas útiles de geometría para olimpiadas de matemáticas

Luis Francisco Medina Quintero

Introducción

La geometría en las olimpiadas de matemáticas ha ido evolucionando tras los años y cada vez son más los resultados que se van conociendo dentro de la comunidad olímpica. La geometría euclidiana ha formado parte de concursos de matemáticas a nivel estatal, regional, nacional e internacional. Sin embargo, la geometría proyectiva ha ganado popularidad en los últimos años y ha sido vía para soluciones elegantes a problemas de olimpiadas de nivel avanzado.

Generalmente, los problemas de geometría en las olimpiadas nacionales e internacionales requieren varios pasos intermedios para conseguir el resultado final, lo cual podría implicar dedicarle más tiempo a estos problemas; por ello se recomienda indagar sobre otros resultados y configuraciones como las que aquí se presentan, a fin de optimizar el tiempo durante un examen. Aún cuando los resultados aquí presentados son avanzados hay que tener en cuenta que los elementos básicos que la conforman son aquellos que se abordan en entrenamietnos de concursos estatales, es decir, la geometría básica está presente en cada uno de ellos (tales como tangentes, incírculos, cíclicos, etcétera).

Asimismo, se dará a conocer algunos lemas y hechos conocidos de geometría que son recurrentes en los problemas de olimpiada, con el fin de identificar configuraciones geométricas, propiedades, e incluso, otros lemas y colorarios que permitan el avance de esta bella rama de las matemáticas.

Lemas de configuraciones

El primer lema que mostraremos es conocido localmente como *lema de Irán* o *lema del ángulo recto en cuerda del incírculo* y está inspirado del problema Iran TST 2009/9, el cual es lo suficientemente famoso como para tener una configuración completa con su nombre. Resulta útil por tener muchas propiedades interesantes que dan lugar a otras configuraciones.

Lema 1. El incírculo del tríangulo ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E, y F, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de los segmentos BC y AC, respectivamente. Si K es la intersección de las rectas BI y EF, entonces BK es perpendicular a KC. Además, K está sobre al recta MN.

Demostración por Jeffrey Kwan [5]. Para la primera parte bastaría con demostrar que el pentágono $CDIEK$ es cíclico. Veamos que ID es perpendicular a BC y que IE es perpendicular a AC, por lo que el cuadrilátero $CDIE$ es cíclico. Dado que D y F son reflexiones a través de la recta BI, tenemos que

$$\angle KDC = 180^\circ - \angle BDK = 180^\circ - \angle BFK = \angle AFE = \angle AEF = \angle KEC,$$

esto completa la primera parte.

Para la segunda parte, notemos que BKC es un triángulo rectángulo, por lo que M es su circuncentro. Por tanto, $\angle CMK = 2\angle CBK = \angle ABC$. Dado que MN es paralela a AB, se sigue que K está sobre la recta MN □

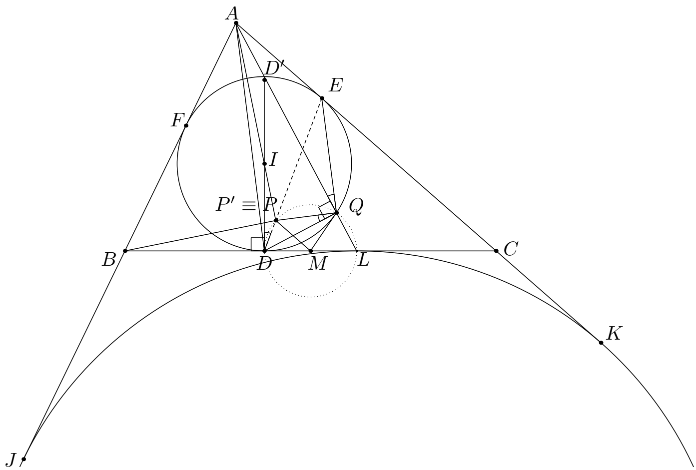
Esta configuración es de gran utilidad cuando en algún problema se nos presenta el incírculo de un triángulo y la intersección de dos de las cualesquiera tres rectas EF, BI y MN, de modo que se tendría que dicho punto de intersección pertenece a la tercera recta en cuestión. Es importante mencionar que este lema es simétrico, es decir, la configuración se aplica de la misma manera para cualquier vértice del triángulo ABC. Además, el punto K resulta útil cuando se tiene un círculo de diámetro BC.

El primer ejemplo es el problema 1 de la Prueba de Selección de Equipo de EE. UU (USA TST, por sus siglas en inglés) del año 2015. Los resultados de este examen se utilizan para determinar (junto con otros factores) el equipo que representará a dicho país en la Olimpiada Internacional de Matemáticas del mismo año.

Ejemplo 1. (USA TST 2015/1) Sea ABC un triángulo tal que $AB \neq AC$, con incentro I y cuyo incírculo es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Denota como M el punto medio de BC. Sea Q un punto sobre el incírculo tal que $\angle AQD = 90^\circ$. Digamos que P es un punto dentro del triángulo y está sobre la recta AI tal que $MD = MP$. Demuestra que $\angle PQE = 90^\circ$ ó $\angle PQF = 90^\circ$.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB < AC$, lo cual implica que $\angle PQF < 90^\circ$, así que sólo mostraremos que $\angle PQE = 90^\circ$. Definamos como D' el punto diametralmente opuesto a D en el incírculo y L como el punto de contacto del $A-$excírculo con BC.

Dado que $\angle AQD = 90^\circ$, se sigue que D' está sobre AQ. Si consideramos la homotecia con centro A entre el incírculo y $A-$excírculo del triángulo ABC, resulta que D' y L son puntos homólogos, entonces A, D' y L son colineales. (Para saber más sobre homotecias de triángulos, acuda a la referencia [7]).



Sean J y K los puntos de contacto del $A-$excírculo del triángulo ABC con las rectas AB y AC, respectivamente. Por propiedades de las rectas tangentes en círculos tenemos que: $AF + FB + BJ = AJ = AK = AE + EC + CK$, de modo que

$$\begin{aligned}
&FB + BJ = EC + CK \\
\Rightarrow &BD + BL = CD + CL \\
\Rightarrow &BD + (BD + DL) = (CL + LD) + CL \\
\Rightarrow &2BD + DL = 2CL + LD \\
\Rightarrow &BD = CL.
\end{aligned}$$

Ya que M es punto medio de BC, entonces M es también punto medio de DL. Veamos que DQL es un triángulo rectángulo, por lo que M es su circuncentro, de donde $MQ = ML = MD$, pero $MD = MP$ entonces P también está sobre dicho círculo.

Dado que $D'D \perp BC$, se sigue entonces que $D'D$ es tangente al circuncírculo de DPQ, de donde $\angle D'DP = \angle DQP$. Dado que $\angle D'QD = 90^\circ$, es suficiente demostrar que $\angle D'QE = \angle DQP$, lo que a su vez equivaldría a demostrar que $\angle D'QE = \angle D'DP$.

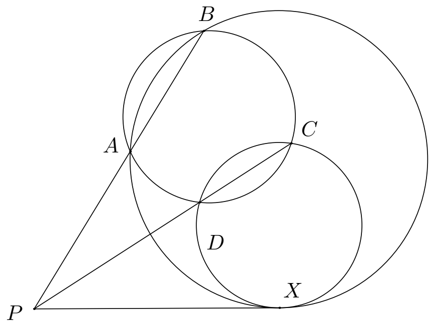
Con lo anterior, nos bastaría probar que P es la intersección de AI con DE, lo cual resultaría en la misma configuración del lema 1. Definamos P' como la intersección de AI con DE, por el lema 1 garantizamos que P' está sobre la paralela a AC por M, lo cual implica que

$$\frac{DM}{MP'} = \frac{DC}{CE} = 1$$

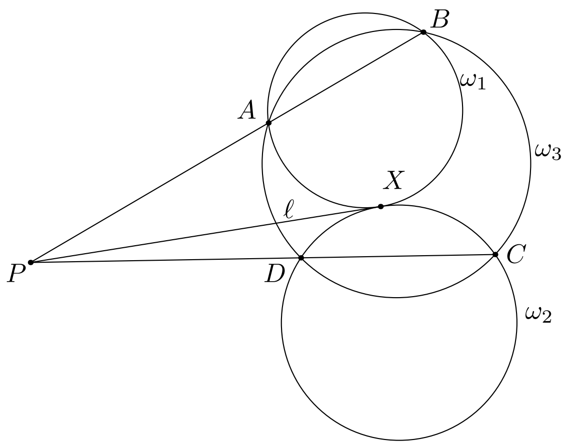
por tanto, $P' \equiv P$. $\square$

El lema 2 resulta ser un caso particular del siguiente teorema:

Teorema del Eje Radical. Los ejes radicales por pares de tres círculos no concéntricos son concurrentes. Esto es, las cuerdas comunes de tres círculos que se intersecan por pares son concurrentes. [2]



Lema 2. Digamos que dos círculos ω_1 y ω_2 son tangentes interiormente en X con ℓ la recta tangente común a estos en el punto X. Un tercer círculo ω_3 corta a ω_1 y a ω_2 en los pares de puntos (A, B) y (C, D), respectivamente. Entonces las rectas ℓ, AB y CD concurren.



Demostración por Tovi Wen [4]. Denotamos la potencia de un punto A con respecto a un círculo cualquiera ω como (A, ω). Supongamos que el eje radical de ω_1 y ω_2, es decir ℓ, interseca al eje radical de ω_2 y ω_3, es decir DC, en P. Entonces

$$PD \cdot PC = PX^2 = (P, \omega_1)$$

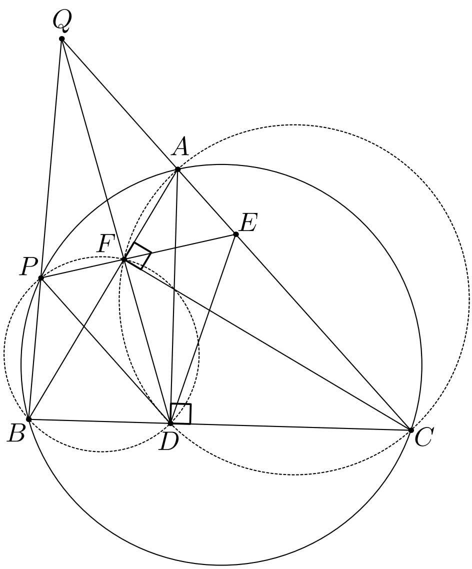
[2] Para conocer más sobre Ejes Radicales se recomiendaleer el artículo *Algunas maneras de usar la potencia* por José Antonio Gómez Ortega, presentado en el cuarto número del año 2009 de esta revista.

por lo tanto, P también está sobre el eje radical de ω_1 y ω_3, es decir, sobre AB. $\square$

El siguiente ejemplo es el problema 3 de la PAGMO 2023, la cual es una olimpiada internacional para mujeres que tiene un enorme potencial de brindar aportes positivos a la comunidad olímpica matemática. Actualmente, el hecho de que haya más mujeres olímpicas de matemáticas, e incluso más mujeres medallistas en las distintas olimpiadas internacionales, es debido muy seguramente, a la realización de la PAGMO y de la EGMO. Por hacer una comparación, en la IMO 2021, 20 de las 64 mujeres participantes resultaron medallistas, mientras que en 2012, año en el que la EGMO celebró su primera edición, en la IMO obtuvieron medalla 17 mujeres de las 51 que participaron.

Ejemplo 2 (PAGMO 2023/3) Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. La recta EF y el circuncírculo de ABC se intersecan en P, de forma que F está entre E y P. Las rectas BP y DF se intersecan en Q. Demostrar que si $ED = EP$, entonces CQ y DP son paralelas.

Solución. Notemos que $\angle PED = 180^\circ - 2\angle ABC$ y por tnto $\angle EPD = \angle ABC$. Además $\angle FPD = \angle EPD = \angle ABC$, de modo que $FPBD$ es un cuadrilátero cíclico.



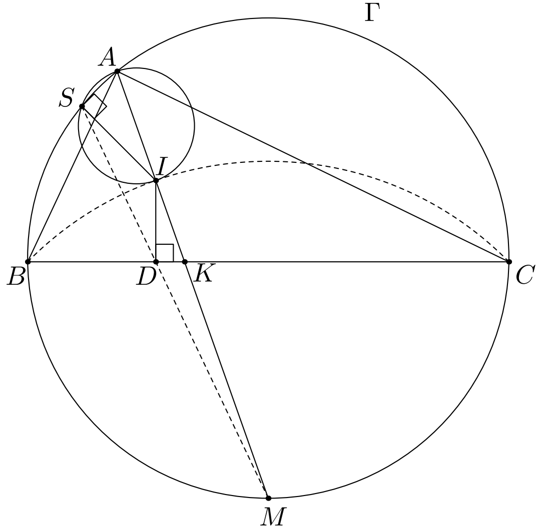
Dado que $PACB$ y $FACD$ son cuadriláteros cíclicos (este último ya que $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$), entonces por el Teorema del Eje Radical, las rectas PB, FD y AC concurren en Q. Finalmente

$$\angle QEP = \angle AEF = \angle ABC = \angle EPD$$

por lo tanto, CQ es paralela a DP. $\square$

Lema 3. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncírculo Γ. El círculo con diámetro AI corta a Γ en S. Digamos que el incírculo del triángulo ABC toca al lado BC en

D y sea M el punto medio del arco BC en Γ que no contiene a A. Entonces S, D y M son colineales.



Demostración consultada de [3]: Para poder entender la demostración que se presenta a continuación, recomendamos al lector consultar [10] de la bibliografía, para la aplicación de la inversión geométrica a la resolución de problemas.

Sea K la intersección de AM con BC. Consideramos la inversión alrededor del circuncírculo del triángulo BIC (nota que su centro es M). Notamos que $\angle MBC = \angle MAC = \angle BAM$ entonces BM es tangente al circuncírculo de BAK, esto es, $BM^2 = MK \cdot MA$. Se sigue que A se intercambia con K.

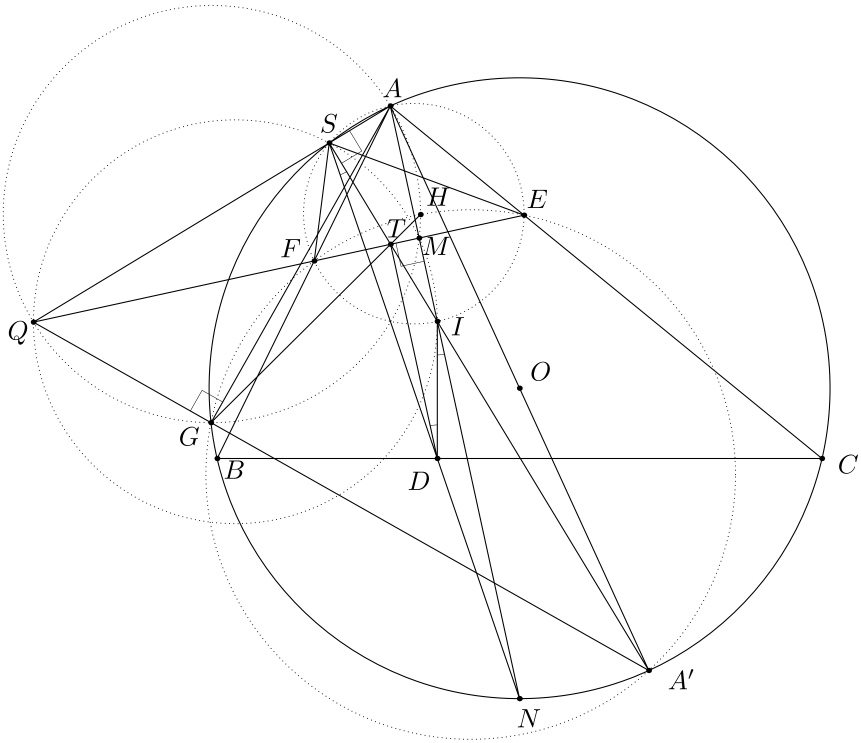
La inversión en cuestión manda la circunferencia de diámetro AI a la circunferencia de diámetro IK y, asimismo, Γ se intercambia con la recta BC. Dado que S es la intersección de Γ con la circunferencia de diámetro AI, entonces el inverso de S es la intersección de BC con la circunferencia de diámetro IK, que claramente es D. $\square$

La ELMO es una olimpiada de matemáticas que empezó el año 1999 y fue llamada originalmente *Experimental Lincoln Math Olympiad*. Esta olimpiada se realiza cada año en la MOP (Mathematical Olympiad Program) de Estados Unidos donde los alumnos realizan y organizan la prueba. Su dificultad y formato es similar a la IMO (es decir, 6 problemas en dos días con 4,5 horas por día).

Ejemplo 3. (Lista corta, ELMO 2019/G3) Sea ABC un triángulo acutángulo con incentro I y circuncentro O. El incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente, y A' es la reflexión de A respecto a O. Los circuncírculos de ABC y $A'EF$ se cortan de nuevo en G, y los circuncírculos de AMG y $A'EF$ se cortan de nuevo en H, donde M es el punto medio de EF. Demuestra que si GH y EF

se cortan en T, entonces $DT \perp EF$.

Solución. Digamos que los circuncírculos de ABC y AFE se cortan de nuevo en S y sea N el punto medio del arco BC (que no contiene a A) en el circuncírculo de ABC. Claramente el circuncírculo de AFE tiene diámetro AI, entonces por el Lema 3 garantizamos que los puntos S, D y N son colineales.



Notemos que $\angle ASI = \angle AFI = 90^\circ$ y como $\angle ASA' = 90^\circ$, tenemos que S, I y A' son colineales. Dado que los cuadriláteros $ASFE$, $EFGA'$ y $GA'AS$ son todos cíclicos, se sigue por el Teorema del Eje Radical que AS, $A'G$ y EF concurren, digamos en Q.

Afirmación. I, T y S con colineales.

Demostración. Sea T' la intersección de EF con IS. Es claro que AM es la mediatriz de EF. Luego, $\angle QSI = 90^\circ$ y $\angle QMI = 90^\circ$ entonces el cuadrilátero $QSMI$ es cíclico.

Por potencia del punto T' con respecto a los cíclicos $IESF$ y $QSMI$, obtenemos que

$$FT' \cdot T'E = ST' \cdot T'I = QT' \cdot T'M \tag{1}$$

Por otro lado, $\angle AMQ = \angle AGA' = \angle AGQ = 90^\circ$, de modo que G está sobre el circuncírculo de AMG. Por potencia del punto T con respecto a los cíclicos $QHMG$ y

$GFHE$, obtenemos que

$$FT \cdot TE = GT \cdot TH = QT \cdot TM \tag{2}$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), concluimos que $T' \equiv T$. □

Es evidente que SN es bisectriz de $\angle BSC$, entonces $\angle BSN = \angle BCN = \angle CBN = \angle DBN$, de modo que BN es tangente al circuncírculo de BSD. Es un hecho conocido que N es el circuncentro del triángulo BIC, por lo que $NI^2 = NB^2 = ND \cdot NS$ entonces NI es tangente al circuncírculo de ISD, de donde $\angle NID = \angle ISD$.

Análogamente en el circuncírculo de AEF, SI es bisectriz de $\angle FSE$, por lo que IF es tangente al circuncírculo FST, por lo que $ID^2 = IF^2 = IT \cdot IS$. por consiguiente ID es tangente al circuncírculo de DST, de donde $\angle IDT = \angle ISD = \angle NID$, por tanto DT es paralela AN. Dado que AN es perpendicular a EF, se concluye que DT es perpendicular a EF □

Lema de razón cruzada.

Recordamos que la razón cruzada es una invariante importante en la geometría proyectiva. Dado cuatro puntos colineales A, B, C y D (que pueden ser puntos en el infinito), definimos una razón cruzada como

$$(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}.$$

Si $(A, B; C, D) = -1$, decimos que es armónico y se cumple que $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Esto último es muy útil porque nos permite obtener relaciones interesantes.

Para conocer más sobre la razón cruzada, se recomienda consultar [2], [11], [12] y [13] de la bibliografía, para los términos de haz armónico, cuarteta armónica, razón cruzada doble, etcétera. Dicho esto, veamos el siguiente lema.

Lema 4. Sean P, R, Q y S puntos colineales en ese orden. Sea T el punto medio de RS. Supón que $PT \cdot PQ = PR \cdot PS$, entonces

I. $TR^2 = TP \cdot TQ$

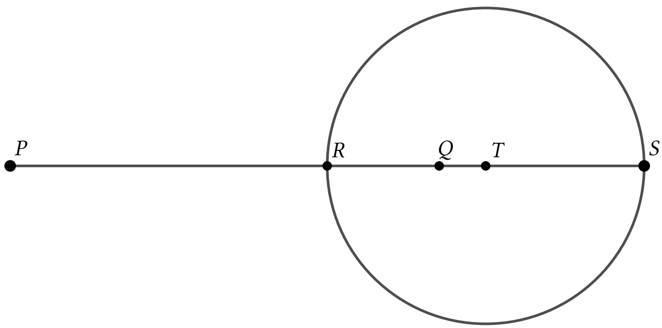
II. $(P, Q; R, S) = -1$.

Demostración obtenida en AoPS. Notemos que

$$PT \cdot PQ = PR \cdot PS = (PT - TR)(PT + TS) = (PT - TR)(PT + TR) = PT^2 - TR^2$$

$$\Rightarrow PT(PT - PQ) = TR^2$$

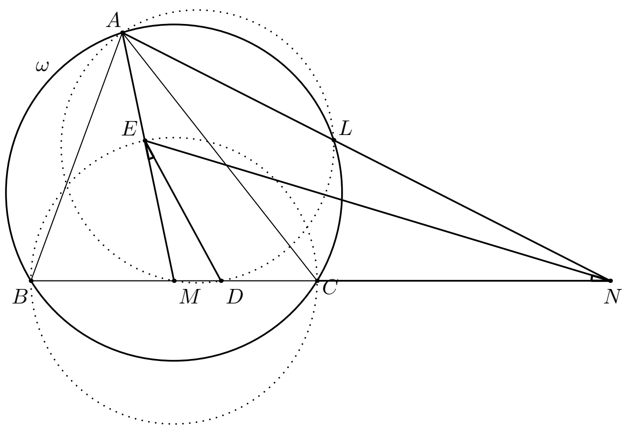
$$\Rightarrow TP \cdot TQ = TR^2$$



Si consideramos la inversión con centro en T y radio TR, resulta que P y Q son inversos. Por la Proposición 9.10 de [1] concluimos que $(P, Q; R, S) = -1$ □

En los siguientes dos problemas usaremos el lema 4.

Ejemplo 4. En un triángulo acutángulo ABC, ω es su circuncírculo y sean D un punto cualquiera sobre el segmento BC y M el punto medio de BC. Digamos que ω corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo ADM en L. Supón que las rectas AL y BC se cortan en N. El círculo con centro M y radio MB corta al segmento AM en E. Demuestra que $\angle MED = \angle ENM$.



Solución. Por potencia del punto N con respecto a ω y al circuncírculo del triángulo ADM:

$$ND \cdot NM = NL \cdot NA = NC \cdot NB$$

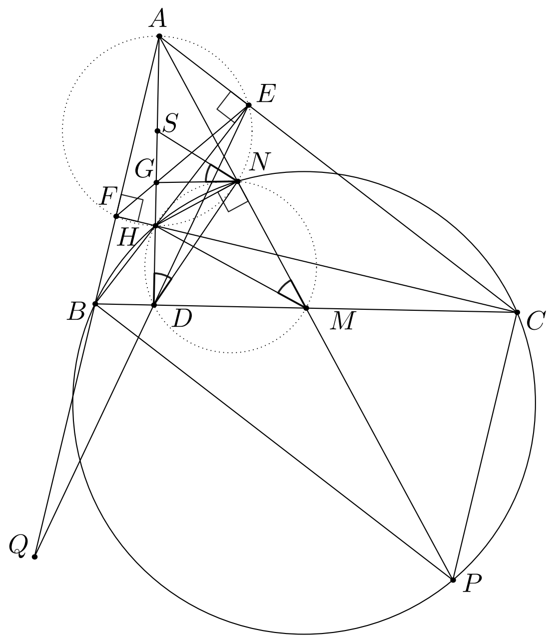
Entonces por el Lema 4 tenemos $(N, D; C, B) = -1$, y por lo tanto, N y D son inversos con respecto al círculo con centro M y radio MB, esto es,

$$ME^2 = MB^2 = MD \cdot MN$$

de modo que ME es tangente al circuncírculo del triángulo EDN, por lo cual $\angle MED = \angle ENM$. □

Ejemplo 5. (Olimpiada de Serbia, 2010) En el triángulo acutángulo ABC, M es el punto medio de BC, y D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean H el ortocentro del triángulo ABC, S el punto medio de AH y G el punto de intersección de FE y AH. Si N es la intersección de la mediana AM con el circuncírculo de BCH, demuestra que $\angle HMA = \angle GNS$.

Solución por Michael Greenberg. [14] Sea P un punto fuera del triángulo ABC tal que $ABPC$ es un paralelogramo. Es conocido que las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan en su punto medio, entonces A, M y P son colineales. Dado que $\angle AEH + \angle AFH = 180^\circ$ entonces $AEHF$ es un cuadrilátero cíclico.



Además, por ángulos en las paralelas

$$\angle BPC = \angle BAC = 180^\circ - \angle FHE = 180^\circ - \angle BHC$$

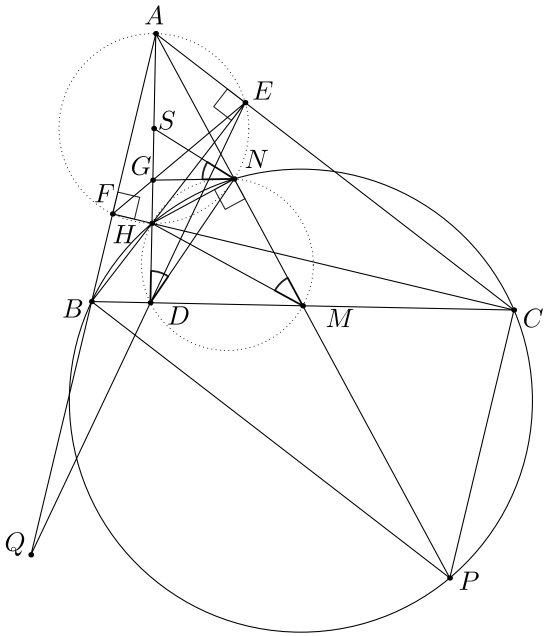
de modo que P está en el circuncírculo de BCH.

Notemos que

$$\angle HNP = \angle HCP = \angle HCB + \angle BCP = (90^\circ - \angle ABC) + \angle ABC = 90^\circ.$$

Dado que $\angle HDM + \angle HNM = 180^\circ$, entonces el cuadrilátero $HDMN$ es cíclico. Asimismo, es claro que N está en el circuncírculo de AFE y S es centro de dicho círculo.

Por otro lado, sea Q la intersección de las rectas AB y DE. Puesto que AD, BE y CF concurren, se sigue por propiedades de los haces armónicos que $(A, B; F, Q) = -1$.



Proyectando por E obtenemos

$$-1 = (A, B; F, Q) \overset{E}{=} (A, H; G, D)$$

cuya notación significa la proyección por el punto E de la recta AB a la recta AD, esto es, tomar perspectiva en E. Para conocer más de esto, se recomienda consultar el capítulo 9 de la bibliografía [1].

Como S es punto medio de AH, por el Lema 4 se garantiza que

$$SN^2 = SH^2 = SG \cdot SD$$

esto es, SN es tangente al circuncírculo de GND.

Se concluye que

$$\angle GNS = \angle GDN = \angle HDN = \angle HMN = \angle HMA$$

$\square$

Ejercicios

1) (BMO 2023/2.) En el triángulo ABC, el incírculo toca los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Supongamos que existe un punto X sobre la recta EF tal que
$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$
Sea M el punto medio del arco BC sobre el circuncírculo de ABC, que no contiene a A. Demuestra que la recta MD pasa a través de E ó F.

2) (Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 2021/6.) Sean ABC un triángulo con $AB < AC$ y M el punto medio de AC. Se escoge un punto P sobre el segmento BC (distinto de B) de tal forma que $AB = AP$. Sean D la intersección de AC con el circuncírculo de $\triangle ABP$ diferente de A, y E la intersección de PM con el circuncírculo de $\triangle ABP$ diferente de P. Sea K el corte entre las rectas AP y DE. Si F es un punto sobre BC (distinto de P) tal que $KP = KF$, demostrar que C, D, E y F están en una misma circunferencia.

3) (IGO Nivel Avanzado 2022/3.) En el triángulo ABC ($\angle A \neq 90^\circ$), sean O y H su circuncentro y el pie de la altura desde A, respectivamente. Supongamos que M y N son los puntos medios de BC y AH, respectivamente. Digamos que D es la intersección de AO y BC, y H' es la reflexión de H respecto a M. Asumamos que el circuncírculo de $OH'D$ interseca al circuncírculo de BOC en E. Demuestra que NO y AE concurren sobre el circuncírculo de BOC.

4) (Lista corta, IMO 2016/G2.) Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ e incentro I y sea M el punto medio BC. Los puntos D, E y F son escogidos sobre BC, CA y AB, respectivamente, tales que $ID \perp BC$, $IE \perp AI$ e $IF \perp AI$. Supongamos que el circuncírculo de $\triangle AEF$ interseca Γ en el punto X distinto de A. Demuestra que las rectas XD y AM se cortan sobre Γ.

5) (OMM 2008/6.) Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M y N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL, corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H y J están sobre una misma circunferencia.

6) (IMO 2021/3.) Sea D un punto interior de un triángulo acutángulo ABC, con $AB > AC$, de forma que $\angle DAB = \angle CAD$. El punto E en el segmento AC satisface que $\angle ADE = \angle BCD$, el punto F en el segmento AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, y el punto X en la recta AC satisface $CX = BX$. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADC y EXD, respectivamente. Probar que las rectas BC, EF y O_1O_2 son concurrentes.

Sugerencias a los ejercicios

1. Considera I el incentro de $\triangle ABC$. Aplica el lema 1 para probar que X es la intersección de BI con EF y nota cómo esto implica que ABC resulta ser un triángulo rectángulo.

2. Denota X como un punto tal que $APCX$ es un paralelogramo. Usa el Teorema del Eje Radical para demostrar que AB, DE y CX concurren.

3. Considera A' como el punto diametralmente opuesto a A en el circuncírculo de $\triangle ABC$ y digamos que AO corta por segunda vez al circuncírculo de BOC en el punto K. Prueba que $OB^2 = OD \cdot OK$ y usa el lema 4 para demostrar que $(A, A'; D, K) = -1$.

4. Supón que el círculo con diámetro AI corta a Γ en S y sea T el punto medio del arco BC en Γ que no contiene a A. Aplica el lema 3 para probar que S, D y T son colineales. Considera la inversión con centro T y radio BT.

5. Muestra que los cuadriláteros $DEJH$, $DEGF$ y $GFJH$ son todos cíclicos y concluye aplicando el Teorema del Eje Radical por contradicción.

6. Prueba que los circuncírculos de DEF y DBC son tangentes, digamos en ℓ y usa el lema 2 para demostrar que BC, EF y ℓ concurren, digamos en S. Considera la inversión con centro S y radio SD y nota cuáles puntos se intercambian.

Bibliografía

1) Chen Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Washington, The Mathematical Association of America, MAA Problem Book Series, 2016.

2) Arellano, R. A. O. (2022). *Geometría Moderna I: Haz armónico.* El blog de Leo; Leonardo Ignacio Martínez Sandoval, https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-i-haz-armonico/

3) AoPS, *The Pythagorean Cult*, https://artofproblemsolving.com/community/c946900h1911664_properties_of_the_sharkydevil_point

4) Tovi Wen, *Power of a Point and Radical Axis*, https://www.nycmathteam.org/wp-content/uploads/2020/10/NYC_Orange_RadicalAxis_Handout.pdf

5) Jeffrey Kwan. (2017). *Two Important Lemmas in Olympiad Geometry.* https://docplayer.net/102795902-Two-important-lemmas-in-

6) Wiki AoPS, *ELMO*, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/ELMO

7) Unam.Mx, *Homotecia*, http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_VI_4/Applets_Geogebra/homotecia.html

8) Wiki AoPS, *USA TST*, https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/USA_TST

9) López N. D., *Comisión de Olimpiadas: Las olimpiadas matemáticas como cantera de talento*. Real Sociedad Matemática Española, https://www.rsme.es/2021/11/

10) García, F. J. (2005) *Inversión en olimpiadas: Aplicación de la inversión a la resolución de problemas*. Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, http://garciacapitan.auna.com

11) I. Martin Isaacs. *Geometría Universitaria*. International Thompson Editores, S.A. de C.V., 2002.

12) L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. México, 1972.

13) Pérez, A. A. (2024, enero 22). *Geometría Moderna II: Unidad 4 Razón Cruzada*. El blog de Leo; Leonardo Ignacio Martínez Sandoval. https://blog.nekomath.com/geometria-moderna-ii-unidad-4

14) Greenberg M. [Michael Greenberg]. (2021, 12 de sept.). *LIVESTREAM GEO #36B: Even More Amazing Problems from Serbia!* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=3lcrdHiBboA

Problemas de práctica

A continuación presentamos 10 problemas de práctica seleccionados especialmente para este número. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros de que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Si cierto número entero lo divides entre 1111, obtienes el número decimal periódico $1.821a821a821a82\ldots$ en donde a representa un mismo dígito en todas sus posiciones. ¿Cuánto vale a?

Problema 2. Demuestra que si a, b son dos números enteros positivos tales que $a+b = 2310$, entonces ab no es un múltiplo de 2310.

Problema 3. Sea $a_1 = 2024$ y para $n > 1$ definimos $a_{n+1} = \frac{n+1}{a_n}$. Determina la mayor potencia de 2 que divide a $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{2024}$.

Problema 4. Encuentra todas las parejas de enteros a, b que cumplan $a^2 = 55 + 9b^2$.

Problema 5. Demuestra que no existe una pareja de números enteros a, b que cumplan $a^2 = 35 + 9b^2$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo y sea X un punto en el lado AC tal que $AX = 2XC$. Prolonga el lado CB hasta un punto Y tal que si D es la intersección ded YX con AB, entonces $YD = 2DX$. Demuestra que $AD/DB = 7/2$.

Problema 7. Encuentra todas las posibilidades para las ternas (a, b, c) de números reales, donde ninguno de ellos es igual a cero, y tal que $ab = c, bc = a, ca = b$.

Problema 8. Determina todos los posibles valores enteros a tales que

$$\frac{2a^2 - 8a + 14}{3a - 3}$$

también sea un valor entero.

Problema 9. Demuestra que la cantidad de múltiplos de 2024 que tienen siete cifras es un múltiplo de 9.

Problema 10. Si a, b son las soluciones de la ecuación $x^2 + 2024x + 2025 = 0$, determina el valor de $a^2 + b^2$.

Soluciones a los problemas de práctica.

Solución 1. Si representamos el número inicial por N, el problema nos está indicando que

$$N \div 1111 = 1.821a821a821a82\ldots$$

Podríamos intentar establecer algún tipo de ecuación, pero la forma más sencilla es usar una estrategia de aproximación.

Lo que nos dice el problema es que si multiplicamos $1.821a821a821a82\ldots$ por 1111 obtendremos el número N. No podemos hacer la multiplicación porque no conocemos el valor de a, pero el número N es *aproximadamente* el valor de $1.821 \times 1111 = 2023.13\ldots$.

El número que estamos buscando es ligeramente mayor a 2023 (porque $1.821a821a\ldots$ es ligeramente mayor a 1.821). Si intentamos con $2024 \div 1111$ obtenemos $1.821782178217\ldots$ por lo que d podría ser 7, pero ¿y si hay algún otro número que funcione? La respuesta es que no, no puede haber otro, ya que $2025 \div 1111 = 1.8226822682\ldots$ por lo que de 2025 en adelante obtendremos un resultado mayor a $1.821\ldots$. Concluimos que la única posibilidad es $d = 7$.

Solución 2. Imaginemos que 2310 divide a ab, como 2310 es múltiplo de 2, también lo será ab. Pero, siendo 2 primo, necesariamente dividirá a a o b. Pero como $2310 = a + b$, si divide a uno de ellos, también tendrá que dividir al otro. Por tanto, 2^2 divide a ab.

Por otro lado, $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, y el mismo argumento usado para el 2 lo podemos repetir para $3, 5, 7$ y 11 porque todos son también primos. Concluimos entonces que $3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ dividen a ab y, por tanto, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 2310^2$ es un divisor de ab, lo cual es imposible, ya que a, b son menores a 2310 y, por tanto $ab < 2310^2$.

Solución 3. Observemos que si n es impar, entonces $a_n \cdot a_{n+1} = n + 1$, por lo que tendremos

$$(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) \cdots (a_{2023} \cdot a_{2024}) = (2)(4)(6) \cdots (2024).$$

Si factorizamos 2 en cada factor, veremos que la expresión anterior es igual a $2^{1012} \cdot 1012!$. Para saber el mayor exponente de 2, nos falta saber cuántos factores 2 aparecen en $1012!$, pero existe una fórmula para saber el exponente con el que aparece un primo en la descomposición en primos de un factorial. En este caso, el exponente de 2 en $1012!$ es

$$\left\lfloor \frac{1012}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1012}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1012}{2^3} \right\rfloor + \cdots,$$

en donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero que es menor o igual a x, denominado también el *piso* de x, y que en este caso es igual a

$$506 + 253 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1005.$$

Por tanto, la mayor potencia de 2 que divide a la expresión es $2^{1012} \cdot 2^{1005} = 2^{2017}$.

Solución 4. Primera solución. Observemos que la ecuación la podemos reescribir como $a^2 - 9b^2 = 55$, pero el lado izquierdo es una diferencia de cuadrados. Por tanto, tendríamos

$$(a - 3b)(a + 3b) = 55.$$

Necesitamos entonces encontrar todas las maneras de tener dos números enteros u, v tales que $uv = 55$ y luego resolveremos el sistema de ecuaciones $a - 3b = u, a + 3b = v$.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que $a - 3b = 5$ y $a + 3b = 11$. En este caso el sistema tiene por solución $a = 8, b = 1$. Pero no es la única posibilidad, ya que podríamos tener $a - 3b = 1$ y $a + 3b = 55$, en cuyo caso obtendríamos la solución $a = 28, b = 9$.

Sin embargo, no son los únicos casos que hay que considerar, puesto que también podríamos tener $a - 3b = 11, a + 3b = 5$, que arroja las soluciones $a = 8, b = -1$, así como también $a - 3b = 55, a + 3b = 1$ que nos lleva a la solución $a = 28, b = 9$.

Podríamos creer que esas son todas las soluciones, pero estaríamos en un error, dado que existen otras parejas de números enteros cuyo producto es 55, por ejemplo $a - 3b = -5$, $a + 3b = -11$, que nos da la solución $a = -8, b = -1$.

Realizando un proceso similar con todas las posibilidades, incluyendo las negativas, obtenemos que la lista de posibles soluciones (a, b) será:

$$(28, 9), (28, -9), (-28, 9), (-28, -9), (8, 1), (8, -1), (-8, 1), (-8, -1).$$

Solución 5. Si bien, podemos proceder con un proceso similar al problema anterior, en cuyo caso obtendríamos que en cada uno de los sistemas de ecuaciones que se obtienen, las soluciones no son enteras, podemos dar una solución alternativa mucho más rápida considerando residuos cuadráticos módulo 3.

Observemos que para cualquier valor entero x, el residuo de x^2 solo puede ser 0 o 1 módulo 3. Por otro lado, $9b^2 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que $35 + 9b^2 \equiv 35 \equiv 2 \pmod 3$, por lo que si existieran valores a, b que satisfagan la ecuación, tendríamos $a^2 \equiv 2 \pmod 3$, lo cual es imposible.

Solución 6. Notemos que el problema está dado en términos de proporciones, es decir, las condiciones hablan de que ciertos segmentos son el doble de otros, y lo que se pide demostrar también es una proporción. Esto sugiere fuertemente que en la solución pueden estar involucradas semejanzas.

Aunque en una primera mirada, no hay triángulos que puedan ser semejantes, podemos hacer uso de un trazo auxiliar. Sea E un punto en CB tal que $DE \parallel AC$. Con este trazo auxiliar obtenemos inmediatamente dos pares de triángulos semejantes: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ y $\triangle YDE \sim YXC$.

De la primera semejanza tenemos

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB} = \frac{AC}{DE} = \frac{3CX}{DE}.$$

De la segunda semejanza tenemos

$$\frac{CX}{DE} = \frac{YX}{YD} = \frac{3}{2}.$$

Combinando ambas tenemos que $\frac{AB}{DB} = \frac{9}{2}$, es decir,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AB - DB}{DB} = \frac{AB}{DB} - 1 = \frac{7}{2}.$$

Solución 7. Notemos que el problema es simétrico en el sentido de que si una terna de números cumple las condiciones, cualquier rearreglo de los mismos también lo hará.

En particular, observemos que $(ab)(bc)(ca) = abc$, por lo que $abc = (abc)^2$, lo cual solo puede suceder si $abc = 0$ o $abc = 1$.

En la primera posibilidad, alguna de las tres variables debe tomar el valor cero. Por la simetría, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $a = 0$. En este caso, $0 = bc$ por lo que $b = 0$ o $c = 0$. Si $b = 0$ entonces $c = ab = 0$ y el otro caso es similar. Concluimos entonces que $abc = 0$ implicará la terna $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

En el segundo caso, $abc = 1$ implica $a(bc) = a{\cdot}a = 1$. Por lo que $a^2 = 1$ y un argumento simétrico demuestra también que $b^2 = 1$ y $c^2 = 1$. Así, cada uno de ellos puede ser 1 o -1, pero por paridad en la ley de los signos, solo puede haber 0 o 2 valores negativos. Concluimos entonces que $abc = 1$ implicará las ternas $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$.

Solución 8. Si $\frac{2a^2-8a+14}{3(a-1)}$ es un entero m, entonces $3m$ también lo será, por lo que

$$3m = \frac{2a^2 - 8a + 14}{a - 1}$$

es un número entero.

Si hacemos la *división larga* de $2a^2 - 8a + 14$ entre $a - 1$, obtenemos el cociente (la parte de arriba de la cajita) $2a - 6$ y el residuo 8, esto quiere decir que

$$\frac{2a^2 - 8a + 14}{a - 1} = 2a - 6 + \frac{8}{a - 1}.$$

La expresión anterior será entera cuando $\frac{8}{a-1}$ lo sea también. Esto nos restringe las posibilidades a que $a - 1$ debe ser un divisor de 8 y, por tanto, $a - 1$ puede ser $1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8$ y entonces $a = 2, 3, 5, 9, 0, -1, -3, -7$. Sin embargo, no todas las posibilidades van a resultar en que la fracción original sea entera. Por ejemplo, si $a = 3$, la fracción vale $4/3$. Necesitamos sustituir cada una de las 8 posibilidades en la fracción original y concluiremos que las únicas posibilidades para a que resultan en una fracción entera son $a = 2, 5, -1, -7$.

Solución 9. El menor número de siete cifras es 1000000 y si lo dividimos entre 2024 obtenemos $494.07\ldots$, por lo que el primer número de siete cifras que será múltiplo de 2024 es $2024 \cdot 495 = 1001880$. El número más grande de siete cifras es 9999999, y si lo dividimos entre 2024 obtenemos $4940.71\ldots$, por lo que el mayor múltiplo de 2024 con siete cifras es $2024 \cdot 4940 = 9998560$.

Concluimos entonces que, la cantidad de múltiplos en dicho rango es $4940 - 494 = 494(10 - 1)$ que claramente es un múltiplo de 9, aunque también podemos observar que $4940 - 494 = 4446$ y aplicar el criterio de divisibilidad por 9.

Solución 10. Un camino de solución podría consistir en hallar los valores de a, b (por ejemplo, con la fórmula cuadrática), y calcular directamente $a^2 + b^2$.

Podemos presentar una solución alternativa, si observamos que el problema refiere a las raíces de una ecuación cuadrática, y nos apoyamos en los métodos descritos en el artículo *Apuntes sobre la ecuación cuadrática* presentado en el número previo de esta revista (año 2024, volumen 2), específicamente, en las fórmulas de Viéta que establecen que, si a, b son las raíces de $x^2 + mx + n$, entonces $a + b = -m$ y $ab = n$.

Aplicando dichas fórmulas aquí, obtenemos $a + b = -2024$ y $ab = 2025$. Aunque no sabemos el valor específico de a y b, observamos que $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, por lo que

$$a^2 + b^2 = (-2024)^2 - 2 \cdot 2025 = 4092526.$$

Problemas de entrenamiento

Año 2024, No. 3

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este tercer número del año 2024. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la segunda entrega de 2025 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, anunciamos que estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de marzo de 2025**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista deberán ser remitidas por *email* a

`revistaomm@gmail.com`

¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1. Sean x, y números reales distintos de cero. Demuestre que

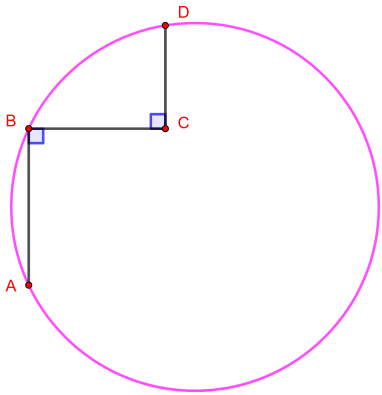
$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10\geq 0.$$

Problema 2. A un congreso de matemáticas asistieron 15 mexicanos y 24 mujeres. De los asistentes, sólo ocho no provenían ni de México ni de Sudamérica y, de esos ocho, cuatro eran mujeres. Demuestre que al congreso asistieron más mujeres sudamericanas que hombres mexicanos.

Problema 3. Determine todos los pares ordenados de números enteros positivos (a, b) tales que $39 \nmid (a^4+1)$ y $39 \nmid (b^2-1)$ pero $39 \mid (a^4+1)(b^2-1)$.

Problema 4. Un empleado del ayuntamiento de Pelotillehue sale a comer poco después de las 6:00 P. M. y en ese momento observa que las manecillas del reloj de la catedral del pueblo forman un ángulo de 110°. Al regresar, un poco antes de las 7:00 P. M., observa que el ángulo entre las manecillas del reloj es nuevamente de 110°. Determine cuántos minutos estuvo fuera del ayuntamiento esa persona.

Problema 5. Considere la figura que se presenta a continuación. Supongamos que A, B y D son puntos sobre la circunferencia y que AB = 9, BC = 8, CD = 6, AB ⊥ BC y BC ⊥ CD. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



Problema 6. Llamemos A' al pie de la altura por A de un triángulo ABC. Sea D es un punto en el interior de $\triangle ABC$ y sobre la altura $\overleftrightarrow{AA'}$. Supóngase además que $\measuredangle CBD = \alpha$, $\measuredangle ABD = 30^\circ - 2\alpha$ y que $\measuredangle ACB = 60^\circ - \alpha$. Demuestre que $\measuredangle BCD = 3\alpha$.

Problema 7. Denominamos *boomerang* a un cuadrilátero que no es convexo y cuyos lados no se cruzan entre sí. Demuestre que no es posible embaldosar un polígono convexo dado mediante una cantidad finita de boomerangs (no necesariamente congruentes entre sí).

Problema 8. Demuestre que entre cualesquiera 39 números naturales consecutivos siempre hay uno cuya suma de dígitos es divisible por 11.

Problema 9. Ana y Beto juegan a especificar los cinco coeficientes intermedios de un polinomio de grado seis del siguiente tipo:

$$x^6 + \square\, x^5 + \square\, x^4 + \square\, x^3 + \square\, x^2 + \square\, x + 1.$$

Todos los coeficientes que Ana y Beto anotan son números reales y Ana es la que escribe primero, luego Beto, después Ana y así sucesivamente. Ana gana si las seis raíces del polinomio que se obtiene después de que los cinco recuadros se han llenado son complejas y Beto gana si alguna de las raíces del polinomio así obtenido es real. ¿Hay alguna estrategia ganadora para Beto?

Problema 10. Determine cuáles son todos los polinomios f, de grado positivo, tales que $f(\mathfrak{p})$ es un número primo para cada número primo $\mathfrak{p}$.

☞ Agradecemos a Daniel Alfonso Santiesteban (Guerrero, Méx.) por comunicarnos los problemas **1** y **3**.

Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2023, No. 4)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la cuarta entrega de 2023 de Tzaloa. En esta ocasión, agradecemos a José Luis Carballo Lucero (Baja California Sur, México) por haber enviado su solución al problema 1 de esa lista, a Titu Zvonaru (Comăneşti, Rumania) por haber contribuido soluciones para los problemas 2, 3 y 10-b y a Fabián Domínguez López (estudiante del Depto. de Matemáticas de la Universidad de Guanajuato) por haber enviado su solución al problema 6; por otra parte, reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente.

En el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en **el primer número de 2024** de la revista. ¡Aún están a tiempo de enviar soluciones!

Problema 1. Sean x, y, z números reales no negativos. Demuestre que

$$x(\sqrt{y}+\sqrt{z})+y(\sqrt{z}+\sqrt{x})+z(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \leq 2\sqrt{3(x^3+y^3+z^3)}.$$

Solución de José Luis Carballo Lucero. Por la simetría del problema podemos suponer que $0 \leq z \leq y \leq x$. En este caso también se cumple que $0 \leq \sqrt{z} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{x}$.

Utilizando la desigualdad del reacomodo con las sextetas

$$(z, z, y, y, x, x) \quad \text{y} \quad (\sqrt{z}, \sqrt{z}, \sqrt{y}, \sqrt{y}, \sqrt{x}, \sqrt{x}),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} x(\sqrt{y}+\sqrt{z})+y(\sqrt{z}+\sqrt{x})+z(\sqrt{x}+\sqrt{y}) &= x\sqrt{y}+x\sqrt{z}+y\sqrt{z}+y\sqrt{x}+z\sqrt{x}+z\sqrt{y} \\ &\leq 2x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, en vista de que

$$(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2 = (x\sqrt{x})^2+(y\sqrt{y})^2+(z\sqrt{z})^2+2x\sqrt{x}\cdot y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}\cdot z\sqrt{z}+2y\sqrt{y}\cdot z\sqrt{z},$$

podemos aplicar la desigualdad del reacomodo a

$$(z\sqrt{z}, z\sqrt{z}, z\sqrt{z}, y\sqrt{y}, y\sqrt{y}, y\sqrt{y}, x\sqrt{x}, x\sqrt{x}, x\sqrt{x})$$

y

$$(z\sqrt{z}, z\sqrt{z}, z\sqrt{z}, y\sqrt{y}, y\sqrt{y}, y\sqrt{y}, x\sqrt{x}, x\sqrt{x}, x\sqrt{x})$$

para llegar a que

$$(x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z})^2 \leq 3(z\sqrt{z})^2 + 3(y\sqrt{y})^2 + 3(x\sqrt{x})^2 = 3(x^3 + y^3 + w^3). \qquad (4)$$

La conclusión deseada se desprende ahora de (3) y (4).

□

Problema 2. Determine todos los números enteros positivos n tales que 6^n puede ser escrito como la suma de los cubos de tres números enteros positivos consecutivos.

Solución. Como 6^n es un número par siempre que $n \in \mathbb{Z}^+$, lo que debemos determinar es aquellas n's para las cuales

$$\begin{aligned} 6^n &= (2k-1)^3 + (2k)^3 + (2k+1)^3 \\ &= 12k(2k^2+1) \qquad (5) \end{aligned}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Como los únicos números primos que dividen a 6^n son el 2 y el 3 y $2 \nmid (2k^2 + 1)$, entonces $2k^2 + 1$ tiene que ser una potencia de 3 (mayor que 1) y, consecuentemente, k ha de ser una potencia de 2. Pongamos $k = 2^M$, donde M representa a un número entero no negativo. Se requiere que $2k^2 + 1 = 3^N$ para algún $N \in \mathbb{Z}^+$; después de la respectiva sustitución esta ecuación deviene en

$$2^{2M+1} + 1 = 3^N. \qquad (6)$$

Afirmamos que $(M = 0, N = 1)$ y $(M = 1, N = 2)$ son las únicas soluciones de la ecuación anterior. Si $M > 1$ entonces $2^{2M+1} + 1 \equiv 1 \pmod 4$ y esto implica que N debe ser un número par. Haciendo $N = 2n$, donde n representa un número entero positivo, la ecuación (6) se puede reescribir como

$$2^{2M+1} = (3^n - 1)(3^n + 1).$$

El teorema fundamental de la aritmética permite asegurar que $3^n - 1 = 2^a$ y $3^n + 1 = 2^b$ para algunos números enteros positivos a y b cuya suma es $2M + 1$; puesto que $2 = (3^n + 1) - (3^n - 1) = 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1)$, entonces $a = 1$, $b = 2$ y $M = \frac{a+b-1}{2} = 1$; esto último entra en conflicto con el supuesto de que $M > 1$.

Concluimos así que $12k(2k^2+1)$ concuerda con una potencia de 6 únicamente cuando $k = 1$ o $k = 2$; en otras palabras, sólo hay dos potencias del número 6 que se pueden expresar como la suma de los cubos de tres números enteros positivos consecutivos: $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ y $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$.

□

Problema 3. Determine todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$$

para todos los números reales x, y, z.

Solución de Titu Zvonaru. Demostraremos que la única función f que satisface la condición dada es la función constante $f(x) = \frac{1}{2}$; es fácil ver que esta función cumple la condición.

Supongamos que f es una solución del problema. Si hacemos $x = y = z = 1$ en la desigualdad se obtiene que

$$\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(1) - f(1)f(1) \geq \frac{1}{4},$$

lo cual se reduce a $0 \geq f(1)^2 - f(1) + \frac{1}{4} = \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2$. Se tiene así que $f(1) = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, al hacer $x = y = z = 0$ se llega a que $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$. De esto se desprende que $f(0) = \frac{1}{2}$.

Luego, si hacemos las sustituciones $x = 0$ y $y = 1$ en la desigualdad dada llegamos a que

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - f(0)f(z) \geq \frac{1}{4}$$

lo cual conduce a que

$$f(z) \leq \frac{1}{2} \tag{7}$$

para cada número real z. Finalmente, haciendo $y = z = 1$ tenemos que

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - f(x)f(1) \geq \frac{1}{4},$$

lo cual implica que

$$f(x) \geq \frac{1}{2} \tag{8}$$

para cada número real x. De (7) y (8) se desprende que $f(x) = \frac{1}{2}$ para cada número real x.

□

Problema 4. Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a < b < c < d$ y $ad = bc$. Demuestre que $2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1$.

Solución.

$\square$

Problema 5. Sea $k > 1$ un número entero impar. Para cada número entero positivo n, sea $f(n)$ el mayor número entero no negativo tal que $2^{f(n)}$ divide a $k^n - 1$. Determine una fórmula para $f(n)$ en términos de k y n.

Solución. Sabemos que

$$k^n - 1 = (k-1)(k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k + 1).$$

Como $k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k + 1 \equiv n \pmod{2}$, tenemos que si n es impar entonces

$$f(n) = v_2(k-1) \tag{9}$$

donde $v_2(k-1)$ es el exponente[3] al que aparece elevado el número primo 2 en la descomposición canónica de $k-1$.

Supongamos ahora que n es un número par. En este caso, $n = 2^\alpha Q$ para algún entero positivo α y algún número impar Q. Haciendo inducción en α demostraremos a continuación que

$$f(k^{2^\alpha Q} - 1) = v_2(k-1) + v_2(k+1) + \alpha - 1. \tag{10}$$

Si $\alpha = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
f(k^{2Q} - 1) &= v_2((k^Q - 1)(k^Q + 1)) \\
&= v_2(k^Q - 1) + v_2(k^Q + 1) \\
&= v_2((k-1)(k^{Q-1} + k^{Q-2} + \ldots + k + 1)) + v_2((k+1)(k^{Q-1} - k^{Q-2} + \ldots - k + 1)).
\end{aligned}$$

Al ser k impar y Q impar observamos que tanto $k^{Q-1} + k^{Q-2} + \ldots + k + 1$ como $k^{Q-1} - k^{Q-2} + \ldots - k + 1$ son números impares; de esto se sigue que $f(k^{2Q} - 1) = v_2(k-1) + v_2(k+1)$, lo cual indica que la fórmula en (10) se cumple cuando $\alpha = 1$. Supongamos que la fórmula es válida cuando α es un número entero positivo fijo (pero arbitrario). Considerando este supuesto demostraremos que también es válida para $\alpha + 1$.

Como k es un número impar entonces $k \equiv \pm 1 \pmod{4}$ y, en consecuencia, $k^{2^\alpha} \equiv 1 \pmod{4}$. De esto se sigue que $k^{2^\alpha Q} \equiv 1 \pmod{4}$ y, por consiguiente, $v_2(k^{2^\alpha Q} + 1) = 1$.

[3] Los lectores que no estén familiarizados con esta notación pueden echar un vistazo al artículo *Valuación p-ádica* de Denisse A. Escobar Parra y César E. Rodríguez Angón que apareció en el cuarto número de 2022 de esta revista.

Así pues,

$$\begin{aligned} f(k^{2^{\alpha+1}Q}-1) &= v_2((k^{2^\alpha Q}-1)(k^{2^\alpha Q}+1)) \\ &= v_2(k^{2^\alpha Q}-1)+v_2(k^{2^\alpha Q}+1) \\ &= v_2(k-1)+v_2(k+1)+\alpha-1+1 \\ &= v_2(k-1)+v_2(k+1)+(\alpha+1)-1 \end{aligned}$$

que es justamente a lo que deseábamos llegar.

Combinando (9) y (10) podemos concluir que

$$f(k^n-1)=\begin{cases} v_2(k-1) & \text{si } n\equiv 1 \pmod 2 \\ v_2(k-1)+v_2(k+1)+v_2(n)-1 & \text{si } n\equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

□

Problema 6. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x \geq y \geq z$. Demuestre que

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq x^2+y^2+z^2.$$

Solución de Fabián Domínguez López. Consideremos en primer lugar la desigualdad $0 \geq (x-y)(y-z)(z-x)$. Desarrollando el producto en el lado derecha de esa desigualdad se llega a que

$$0\geq xy^2+yz^2+zx^2-xz^2-zy^2-yx^2$$

o bien a que

$$x^2(y-z)+z^2(x-y)\geq y^2(x-z).$$

Luego, al tenerse que $\frac{1}{z}\geq\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}\geq\frac{1}{x}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{x^2(y-z)}{z}+\frac{z^2(x-y)}{y} &\geq \frac{x^2(y-z)}{x}+\frac{z^2(x-y)}{x} \\ &\geq \frac{y^2(x-z)}{x}. \end{aligned}$$

De esto se desprende que

$$x^2\left(\frac{y}{z}-1\right)+y^2\left(\frac{z}{x}-1\right)+z^2\left(\frac{x}{y}-1\right)\geq 0$$

y la demostración termina.

□

Problema 7. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Sean A' el punto medio de la hipotenusa y M el punto medio de la altura AD con D en BC. Si P es la intersección de BM y AA', demuestre que $\tan(\measuredangle PCB) = (\operatorname{sen} \measuredangle ACB)(\cos \measuredangle ACB)$.

Solución. Apliquemos el teorema de Menelao en el triángulo $AA'D$, para los puntos colineales B, M, P y obtenemos

$$\frac{A'B}{BD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AP}{PA'} = -1,$$

lo cual equivale, pues $DM = MA$ a que

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{DB}{BA'} = \frac{2DB}{BC} = \frac{2AB^2}{BC^2} = 2\operatorname{sen} C,$$

donde no consideraremos segmentos dirigidos y por tanto podemos obviar el signo negativo.

Por otro lado, la ley de los senos aplicada en $\triangle PCA'$ y $\triangle PCA$, y usando que $A'C = A'A = A'B$, nos dice que

$$\frac{PA'}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{PC}{\operatorname{sen} 2B}, \qquad \frac{PA}{\operatorname{sen}(C-\alpha)} = \frac{PC}{\operatorname{sen} C},$$

donde $\alpha = \angle PCB$.

Combinando las últimas dos igualdades obtenemos

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{\operatorname{sen}(C-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2B}{\operatorname{sen} C},$$

que podemos desarrollar como

$$\frac{\operatorname{sen} C\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos C}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2B}{\operatorname{sen} C}.$$

Pero las igualdades obtenidas con Menelao nos dan

$$(\cot\alpha - \cot C)\operatorname{sen} 2B = 2\operatorname{sen}^2 C,$$

y por la fórmula para ángulo doble resulta en

$$(\cot\alpha - \cot C) \cdot 2\operatorname{sen} B\cos B = 2\operatorname{sen}^2 C,$$

que, como $\cos B = \sin C$, podemos simplificar

$$(\cot\alpha - \cot C) \cdot \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} C.$$

Pero como $\operatorname{sen} B = \cos C$, podemos pasar dividiendo para obtener

$$\cot\alpha - \cot C = \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \tan C.$$

Así, $\cot\alpha = \cot C + \tan C = \frac{1}{\operatorname{sen} C \cos C}$ de donde se llega a la conclusión. $\square$

Problema 8. Determine todas las ternas de números primos (p, q, r) tales que $p^q + p^r$ sea un cuadrado perfecto.

Solución. Primero determinemos las ternas en las cuales $q = r$. En este caso, $p^q + p^r = 2p^q$ y entonces p tiene que ser igual a 2 y q puede ser cualquier número primo impar.

Si $r < q$, entonces $p^q + p^r = p^r(p^{q-r} + 1)$. Puesto que en este caso $p \nmid (p^{q-r} + 1)$, entonces $r = v_p(p^q + p^r)$ debe ser igual a 2 y $p^{q-r} + 1 = x^2$ para algún $x \in \mathbb{Z}^+$. La ecuación anterior se puede reescribir como $p^{q-r} = (x-1)(x+1)$; del teorema fundamental de la aritmética se sigue que $x - 1 = p^\alpha$ y $x + 1 = p^\beta$ donde α y β son números enteros no negativos cuya suma es $q - r$. Al ser $2 = (x+1) - (x-1) = p^\beta - p^\alpha = p^\alpha(p^{\beta-\alpha} - 1)$ se desprende que $p = 2$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$; en consecuencia, $q = 5$.

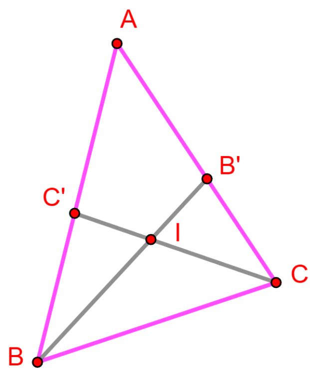
Concluimos así que las ternas de números primos que satisfacen lo solicitado son $(p = 2, q = 5, r = 2)$, $(p = 2, q = 2, r = 5)$ y todas las del tipo $(p = 2, q, r = q)$ con q un número primo impar.

$\square$

Problema 9. Sea ABC un triángulo con incentro I y supóngase que $AB \neq AC$. Sean BB' (con B' en AC) y CC' (con C' en AB) las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$, respectivamente. Demuestre que

$$1 < \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} < \frac{3}{2}.$$

Solución. En el siguiente diagrama aparecen todos los puntos mencionados en el planteamiento del problema:



Hagamos $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$. Aplicando el teorema de la bisectriz en $\triangle ABC$ se obtiene que

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a}. \tag{11}$$

Invocando el mismo teorema pero en los triángulos $C'CB$ y $B'BC$ se llega a que

$$\frac{IC'}{IC} = \frac{C'B}{a} \tag{12}$$

y

$$\frac{IB'}{IB} = \frac{B'C}{a}. \tag{13}$$

De la primera proporción en (11) se sigue que $\frac{AC}{B'C} = 1 + \frac{B'A}{B'C} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a}$: esto último implica que $B'C = \frac{ab}{a+c}$. Procediendo de la misma manera pero con la segunda proporción obtenemos que $C'B = \frac{ac}{a+b}$. Tomando en cuenta lo anterior y las proporciones en (12) y (13) vemos que

$$\frac{BB'}{BI} = 1 + \frac{IB'}{BI} = 1 + \frac{b}{a+c} = \frac{a+b+c}{a+c}$$

y que

$$\frac{CC'}{CI} = 1 + \frac{IC'}{CI} = 1 + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{a+b}.$$

Así pues,

$$\frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} = \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} = 1 + \frac{a}{a+b+c}.$$

De esto es claro que $\frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} > 1$. Para establecer la otra desigualdad apelamos a la desigualdad del triángulo: dado que $a < b + c$ se colige que $2a < a + b + c$ y, por lo tanto,

$$\frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} = 1 + \frac{a}{a+b+c} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

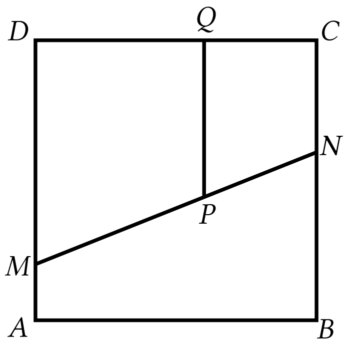
Problema 10.

a) Divide un triángulo equilátero en 3 polígonos que sean semejantes entre sí pero que no sean congruentes entre sí.

b) Divide un cuadrado en 3 polígonos que sean semejantes entre sí pero que no sean congruentes entre sí.

Solución de Tito Zvonaru. En la figura, tomemos $AB = 1$, $DM = x$, $CN = y$, $AM = 1 - x$, $BN = 1 - y$. Consideremos puntos P, Q en MN, CD respectivamente, tales que $PQ = \sqrt{xy}$. Podemos deducir que

$$CQ = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, DQ = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$



Tenemos entonces $\frac{CN}{QP} = \frac{QP}{DM} = \frac{CQ}{QD}$. Dado que los trapezoides $QPNC$ y $DMPQ$ tienen ángulos iguales, se sigue que son semejantes. Los trapezoides $QPNC$ y $ABNM$ son semejantes si y sólo si

$$\frac{CN}{AM} = \frac{QP}{BN} = \frac{CQ}{AB},$$

es decir,

$$\frac{y}{1-x} = \frac{\sqrt{xy}}{1-y} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$

que tras deshacernos de los denominadores resulta en

$$\sqrt{xy} + y = 1 - x, \quad x + \sqrt{xy} = 1 - y.$$

Consideremos la ecuación $x+\sqrt{xy}+y-1 = 0$ que es cuadrática si hacemos el cambio $u = \sqrt{x}$. La ecuación tiene un discriminante igual a $4 - 3y$, lo cual quiere decir que para $y < 1$ obtenemos la raíz positiva

$$\frac{-\sqrt{y} + \sqrt{4-3y}}{2}.$$

De aquí, se puede verificar que $\sqrt{4-3y} - \sqrt{y} < 2$. Por ejemplo, tomaando $y = \frac{1}{4}$ arroja $\sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Los polígonos $QPNC$, $DMPQ$, $ABNM$ son, entonces, semejantes. □

8º Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

Del 19 al 22 de septiembre de 2024 se llevó a cabo de manera presencial en la ciudad de Oaxtepec, Morelos, el Concurso Nacional de la 8a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron (add info) estudiantes de primaria y (add info) estudiantes de secundaria, representando a (add info) entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de quinto y sexto año de primaria.
b) Nivel II: Estudiantes de primer y segundo año de secundaria.
c) Nivel III: Estudiantes de tercer año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta numérica que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual donde podrán escribir sus soluciones. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Ganadores 8° Concurso Nacional de la OMMEB - Nivel II

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro y plata en las pruebas individual y por equipos, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2025.

Los alumnos ganadores de **medalla de plata** en la prueba individual del Nivel II son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Johan Emmanuel Ramos Rosas (Guerrero)
Ignacio Ostos Aponte (Nuevo León)
José Antonio Vega Sánchez (Guanajuato)
José Andrés Martínez Salazar (San Luis Potosí)
Fernando Gael Martín Barajas (Ciudad de México)
Josué Francisco De La Fuente Jiménez (Nuevo León)
Sebastián Guzmán Morán (Jalisco)
Niza Daniela Sierra Jasso (Coahuila)
Diego Pérez Fernández (Sinaloa)
Ulises González López (Coahuila)
Víctor Gerardo Vázquez Basto (Yucatán)
Sebastián Preciado Molina (Zacatecas)

Los alumnos ganadores de **medalla de oro** en la prueba individual del Nivel II del 8vo Concurso Nacional de la OMMEB son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Ander Alonso Albores Ramírez (Guanajuato)
Carlos Santiago López Figueroa (Chiapas)
Leonardo Edín González Díaz (Chiapas)
David Reyes De la Rosa (San Luis Potosí)
Santiago Garza Silva (Nuevo León)
Axel Ahtziri Ibañez Chavez (Zacatecas)

El equipo ganador de **medalla de plata** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Nuevo León** conformado por:

Ignacio Ostos Aponte
Josué Francisco De La Fuente Jiménez
Santiago Garza Silva

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Sonora** conformado por:

Daniel Francisco González Moreno
Santiago Romero Meneses
Sebastián Preciado Molina

Aunque la prueba se divida en dos partes, adicionalmente se entrega el premio de campeón de campeones, que se otorga al equipo cuya suma de los puntajes individuales de sus concursantes además del puntaje en la prueba por equipos sea la más alta. En esta ocasión el equipo nombrado como **Campeón de Campeones** en Nivel II fue el estado de **Nuevo León** conformado por:

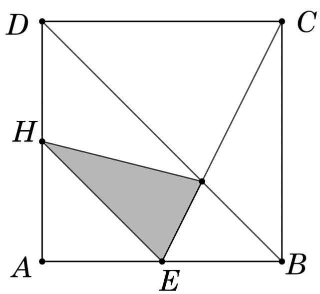
Ignacio Ostos Aponte
Josué Francisco De La Fuente Jiménez
Santiago Garza Silva

En este número presentaremos los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos de Nivel II, en el número previo se presentaron los de Nivel I y en el siguiente número se presentarán los del Nivel III.

Prueba individual (Nivel II)

Parte A

Problema 1. La figura muestra un cuadrado de lado 4cm tal que E y H son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente ¿Cuál es, en cm^2, el valor del área sombreada?



Problema 2. Abigaíl salió a cenar por su cumpleaños con 6 de sus amigas. Inicialmente habían dividido la cuenta entre 7 personas en partes iguales, pero luego decidieron que Abigaíl no pagara ya que era su cumpleaños; entonces dividieron la cuenta entre 6 personas en partes iguales y, por esto, cada amiga terminó pagando 37 pesos más. ¿De cuántos pesos había sido originalmente la cuenta?

Problema 3. Kara el capibara se alimenta de sandías con un posible peso de 1, 2, 4 u 8 kg. Si Kara decide consumir 40 kg de sandía en una semana, de tal forma que cada día come 3 sandías, y en la semana consume al menos 1 sandía de cada peso, ¿Cuál es la máxima cantidad de sandiás de 1 kg que puede digerir?

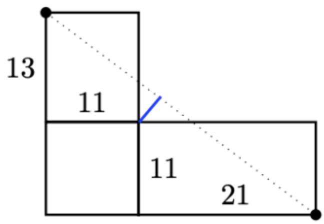
Problema 4. En una sucesión de enteros positivos, cada término, excepto el primero y el segundo, es la suma de todos los términos anteriores a él. Si el primer término es 1 y el décimo primer término es 1024, ¿cuál es el segundo término?

Problema 5. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60^\circ$. Se traza la altura de ABC que pasa por A y choca con BC en D. E es un punto en AC tal que DE es paralelo a AB. F es un punto en BC tal que EF es bisectriz del $\angle DEC$. M es un punto en AC tal que FM es paralelo a AB. Si M es punto medio de AC y $AB = 2$. Calcule el valor de EF.

Problema 6. Un postre *carbonifero* se hace con 4 bolas de helado. En la nevería de la esquina venden 3 sabores de helado de fruta (fresa, mango y limón) y 3 sabores que no son de fruta (chocolate, vainilla y menta). Un postre carbonífero es *superfrutal* si lleva más bolas de helado de fruta que de las que no son de fruta. ¿Cuántos postres *carboniferos superfrutales* diferentes se pueden hacer? (**Nota:** los postres pueden llevar más de una bola del mismo sabor y no importa el orden de los sabores en el postre.)

Problema 7. ¿Cuántas parejas de enteros positivos a y b menores que 10 cumplen que $5a$ divide a $(a+b)^2$?

Problema 8. Un rectángulo de 13 x 11 y uno de 21 x 11 se pegaron sobre los lados de un cuadrado de 11 x 11. ¿A qué distancia pasa la línea punteada del vértice del cuadrado?

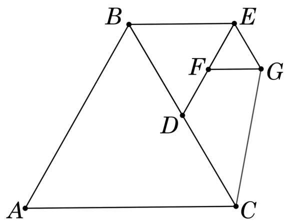


.

Problema 9. Sea $S(n)$ la suma de dígitos del entero positivo n. Un año $n \geq 2017$ se dice azulado si en ese año se realiza la edición k de la OMMEB y $S(n) = k$. Por ejemplo, 2024 es azulado ya que $2 + 0 + 2 + 4 = 8$. Si la OMMEB se hace 1 vez por año y se hizo por primera vez en 2017, ¿cuántos años son azulados?

Problema 10. Dani tiene 10 cartas: una con el número 1, dos con el número 2, tres con el número 3 y cuatro con el número 4. Si elegirá solamente 4 cartas para formar un número de 4 dígitos, ¿cuántos números diferentes puede formar Dani?

Problema 11. Sean ABC, BDE y EFG triángulos equiláteros cuyos lados miden 4, 2 y 1 cm, respectivamente. Determina el área, en cm^2, del pentágono $ABEGC$.

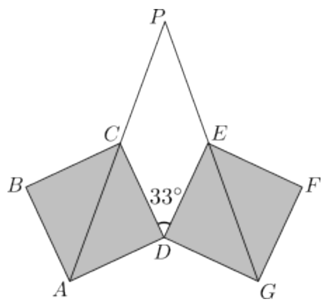


.

Problema 12. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (n, m) cumplen que $11n + 23m = 2024$?

Parte B

Problema 13. En la figura, los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ tienen lados de la misma medida. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y EG. Si $\angle CDE = 33°$, calcula la medida, en grados, de $\angle APG$.

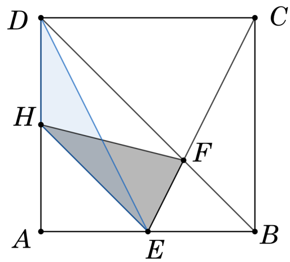


Problema 14. Un número de 4 dígitos $\overline{abcd}$ es *prencial* si el número de 3 dígitos $\overline{bcd}$ divide a $\overline{abcd}$. Por ejemplo, 5100 es prencial porque 100 divide a 5100. ¿Cuántos números prenciales menores a 2024 existen?

Problema 15. Beto está eligiendo un número de 2 dígitos para su nueva casa. En la tienda, hay dos cajas con dígitos. La primera caja tiene los dígitos 2, 3, 4, 5, 7, 9 y de ahí saca las decenas. La segunda tiene los dígitos 1, 6, 8 y de ahí saca las unidades. Además, Beto quiere elegir un número de 2 dígitos tal que sí mismo y el número que se obtiene al voltear el orden de sus cifras, sean ambos primos o ambos compuestos. ¿De cuántas formas puede hacer esto?

Soluciones del examen individual (Nivel II)

Solución 1. Tenemos una semejanza $\triangle HEA \simeq \triangle DBA$ por el criterio LAL, entonces $HE \parallel DB$. Llamemos F a la intersección de EC con DB. Considerando HE como base, los triángulos HEF (el que nos interesa) y HED tienen la misma área al compartir base y tener la misma altura (la distancia entre las paralelas). Tomando DH como base y AE como altura, el triángulo DHE tiene área 2cm^2 y entonces el área del triángulo HEF es 2cm^2.



Solución 2. Al cambiar la cuenta, cada una pagó \$37 más, de manera que a Abigaíl le habían tocado $37 \cdot 6 = 222$ pesos. La cuenta original era de $222 \cdot 7 = 1554$ pesos.

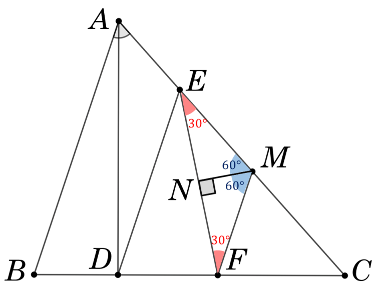
Solución 3. Se comen 21 sandías en toda la semana, pues 7 días × 3 sandías = 21. De esas 21 sandías, 4 son las obligatorios de 1, 2, 4 y 8 kg, entonces nos quedan 17 sandías a elección y un peso de 40 - 15 = 25 kg por digerir. Después, nos vemos forzados a usar una sandía de 1 kg pues 25 kg es impar, entonces nos quedan 16 sandiás a elección y 24 kg de comida por consumir. Si consumieramos las 16 sandías que nos faltan con puras sandías de 1 kg, sólo llenaremos 16/24 kg necesarios; con 15 sandias de 1kg nos faltarían 9 kg, y nuestra sandía más pesada es de 8kg, así que tampoco podemos. Si consumimos 14 sandías de 1kg, nos faltarían 10 kg por consumir con 2 sandías, los cuales podemos convenientemente satisfacer con una sandía de 2 kg y una de 8 kg. Finalmente, el máximo número de sandías de 1 kg son las dos iniciales más las catorce ya mencionadas.

Solución 4. Sea n el segundo término de la sucesión. Como el primer término es 1, el tercer término resulta ser $1+n$. Luego, el cuarto término es $1+n+(1+n)$. O sea, $2(1+n)$.

Repitiendo este proceso, se sigue que los siguientes siete términos de la sucesión son: $4(1+n)$, $8(1+n)$, $16(1+n)$, $32(1+n)$, $64(1+n)$, $128(1+n)$ y $256(1+n)$.

Así, $256(1+n) = 1024$. O sea, $1+n = 4$. De este hecho, concluimos que $n = 3$. Por lo tanto, el segundo término de la sucesión es 3.

Solución 5. El dibujo queda así:



Vemos que como $AB||MF$ y M es punto medio, entonces por Tales, F también es punto medio y $MF = 1$. De aquí vemos que como EF es bisectriz y $\angle DEC = \angle BAC = 60^\circ$ entonces $\angle FEC = 30^\circ$. También sabemos que $\angle EMF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ entonces $\angle MFE = 30^\circ$. Por lo tanto $ME = MF = 1$ entonces con eso podemos calcular EF: trazando la altura NM del triángulo EFM notamos que lo divide en dos triángulos congruentes y cada uno de ellos es la mitad de un triángulo equilátero de lado 1, de donde el segmento buscado es la suma de las dos alturas de dichos triángulos equiláteros, $EF = EN + NF = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1.73$.

Solución 6. Primero, notemos que los postres superfrutales deben tener 3 o 4 bolas de fruta.

Si el postre tiene 3 bolas de fruta, entonces puede que las 3 sean del mismo sabor, que haya 2 de un sabor y 1 de otro, o que los 3 sabores sean diferentes. En el primer caso tenemos 3 maneras de elegir el sabor que se repite, en el segundo caso tenemos 3 maneras de elegir el sabor que se repite y 2 de elegir el sabor restante (3x2 = 6 combinaciones), y

en el último caso solo hay un acomodo. Sumando tenemos 10 maneras. Como en cualquier caso tenemos 3 maneras de elegir el sabor que no es de fruta, entonces tendramos 10x3 = 30 combinaciones diferentes.
Si el postre tuviera 4 bolas de fruta, entonces puede que las 4 sean del mismo sabor, que haya 3 de un sabor y 1 de otro, que haya 2 de un sabor y 2 de otro, o que haya 2 de un sabor y 1 de cada uno de los otros. Del primer caso tenemos 3 maneras, del segundo caso tenemos 3 maneras de elegir al sabor que se repite y 2 de elegir al restante (3x2), del tercer caso tenemos 3C2 = 3 maneras de elegir los dos sabores, y del cuarto caso tenemos 3 maneras de elegir el sabor que se repite. Entonces tendríamos 3 + 6 + 3 + 3 = 15 combinaciones diferentes.
Sumando ambos resultados, llegamos a que existen 30 + 15 = **45** postres carboniferos superfrutales diferentes.

Solución 7. Como $5a$ divide a $(a+b)^2$, 5 divide a $(a+b)^2$ y como 5 es primo, entonces 5 divide a $a+b$. Además, como cada uno es menor que 10, $a+b$ es a lo más 18 y luego es alguno de

$$5, \quad 10 \quad \text{o} \quad 15.$$

Podemos enlistar cada caso y verificar si se cumple, o no, la condición,

$\mathbf{a+b=5}$	$\mathbf{a+b=10}$	$\mathbf{a+b=15}$
$a=1,\ b=4$	$a=1,\ b=9$	$a=6,\ b=9$ $\times$
$a=2,\ b=3$ $\times$	$a=2,\ b=8$	$a=7,\ b=8$ $\times$
$a=3,\ b=4$ $\times$	$a=3,\ b=7$ $\times$	$a=8,\ b=7$ $\times$
$a=4,\ b=1$ $\times$	$a=4,\ b=6$	$a=9,\ b=6$
	$a=5,\ b=5$	
	$a=6,\ b=4$ $\times$	
	$a=7,\ b=3$ $\times$	
	$a=8,\ b=2$ $\times$	
	$a=9,\ b=1$ $\times$	

Esto es, son 6 parejas.

Solución 8. La base y la altura del triángulo rectángulo formado por la línea punteada son de 24 y 32, haciendo los triángulos semejantes al 3, 4, 5. La altura de este triángulo respecto al 5 es de 12/5, de manera que el área sale igual que con la base y la altura de 3 y 4.

En el dibujo, la distancia deseada es la altura de un triángulo semejante a éste, pero que mide de base 21-44/3 = 19/3

Haciendo la proporción, esa distancia mide 19/5.

Solución 9. Notemos que 2020 es el primer año azulado y de ahí a 2029 todos lo son. Vemos que $S(n+1) \leq S(n)+1$ (si el último dígito de n es 9, $S(n+1) < S(n)$ y si no lo es, $S(n+1) = S(n)+1$). Por tanto como $S(2030) < 14$, todo $n \geq 2030$ no va a ser azulado. Así que hay 10 años azulados.

Solución 10. Procedemos por casos.

- Si los 4 dígitos son iguales, solo hay una forma y todos deben ser dígitos 4.
- Si se tienen 3 dígitos iguales y uno diferente, hay 4 permutaciones. Los dígitos iguales pueden ser el 3 o el 4, y el cuarto dígito puede ser cualquiera de los otros, por lo que hay $4 \times 2 \times 3 = 24$ formas.
- Si se tienen 2 dígitos iguales y los otros dos diferentes, tenemos $\frac{4!}{2!}$ permutaciones. Los dígitos iguales pueden ser 2, 3 o 4, y los otros dos los podemos elegir de $\binom{3}{2}$ formas. Tenemos $3 \times \binom{3}{2} \times \frac{4!}{2!} = 3 \times 3 \times 12 = 108$ formas.
- Si se tienen 2 pares de dígitos iguales, hay $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ permutaciones. Tanto el primero como el segundo par de dígitos pueden ser 2, 3 o 4. Tenemos $\frac{3 \times 2}{2} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 3 \times 6 = 18$ formas.
- Si se tienen 4 dígitos diferentes, hay $4! = 24$ formas.

En total son $1 + 24 + 108 + 18 + 24 = 175$.

Solución 11. Recordemos que el área de un triángulo equilátero de lado x es $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Así $(ABC) = 4\sqrt{3}$ y $(BDE) = \sqrt{3}$. Entonces solo falta obtener el área del cuadrilátero $CDEG$. Veamos que F es el circuncentro del triángulo DEG, pues $DF = FE = FG$, entonces $\angle DGE = 90^\circ$. Entonces como $DE = 2$ y $EG = 1$, por Pitágoras tenemos que $DG = \sqrt{3}$. Dado que $\angle GDE = 30^\circ$ y $\angle BDE = 60^\circ$, con lo podemos obtener que $\angle CDG = 90^\circ$. Ya que $CD = CB - DE = 2$, el área del triángulo $(CDG) = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$ y $(DGE) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Así el área del pentágono es

$$4\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{13\sqrt{3}}{2} \approx 11.245$$

.

Solución 12. Reescribiendo la ecuación notamos que $11n = 23(88 - m)$, así que $23|11n$, entonces $23|n$. Análogamente, $23m = 11(184 - m)$, entonces $11|m$
Podemos reescribir las variables como $n = 23p$ y $m = 11q$ con p, q enteros, al sustituir en la ecuación original obtenemos:

$$11(23p) + 23(11m) = 2024$$

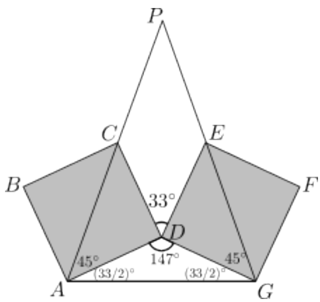
$$11(23)(p + q) = 2024$$

$$p + q = \frac{2024}{11(23)} = 8$$

Las soluciones a esto son $(p, 8 - p)$ y $1 \leq p \leq 7$, así que solo hay 7 posibles soluciones.

Solución 13. Teniendo en cuenta que $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle CDE = 33^\circ$ y $\angle EDG = 90^\circ$, es fácil deducir que $\angle ADG = 147^\circ$. Como $AD = DG$, el triángulo ADG es isósceles. Así, $\angle DAG = \angle AGD = (33/2)^\circ = 16.5^\circ$. Ya que AC y EG son diagonales de los cuadrados, tenemos que $\angle CAD = \angle DGE = 45^\circ$. En consecuencia,

$$\angle APG = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ + 33^\circ) = 57^\circ.$$



Solución 14. Primero, notemos que $\overline{abcd}$ puede ser escrito como 1000a + $\overline{bcd}$. Si $\overline{bcd}$ divide a 1000a + $\overline{bcd}$, entonces debe dividir a 1000a.
Como el numero de 4 dígitos debe ser menor a 2024, entonces tenemos que a puede ser 1 o 2. Si a es 1 entonces $\overline{bcd}$ es un divisor de 1000. Como 1000 = $2^3 \times 5^3$, entonces tiene (3+1)(3+1) = 16 divisores, pero como queremos los divisores menores a 1000, entonces sólo tenemos 15 divisores elegibles.
Si a = 2, entonces $\overline{bcd}$ es un divisor de 2000 menor o igual a 24. Los divisores de 2000 menores a 24 son 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, o sea que son 8.
Entonces, hay 15 + 8 = 23 números prenciales.

Solución 15. Notemos que si la primera cifra es 2, 4 o 5 no pueden ser ambos primos ya que no hay primos de 2 dígitos que terminen en alguno de ellos. Al emparejar cualquiera de esos 3 con 6 u 8 claramente ambos serán compuestos por lo que ya tenemos $3 \times 2 = 6$ casos. Cuando los emparejamos con el 1 hay otros 2 casos favorables (21, 51 son compuestos y 41 no).

Si la primera cifra es 3, 7 o 9 y se empareja con el 1 hay 2 casos favorables (17, 71 ambos primos, 13, 31 ambos primos y 19, 91 uno primo y uno compuesto). Si se empareja con 6 u 8 ambos tienen que ser compuestos y tenemos 3 casos favorables más (36, 63, 96, 69 y 78, 87). Así que en total son 13 formas de elegir el número.

Prueba por equipos (Nivel II)

Problema 1. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 10^{2024} cumplen la condición de que la suma de sus dígitos es 2?

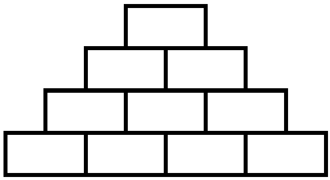
Problema 2. Supongamos que tengo una hoja cuadrada de papel con una longitud de lado de 2024 cm. Primero, corto una tira con un corte paralelo a uno de los lados, a una distancia de 1 cm. Luego, hago un corte paralelo al siguiente lado en el sentido de las agujas del reloj, a una distancia de 2 cm de ese lado, y corto otra tira. Continúo este procedimiento, haciendo cortes paralelos a los lados siguientes en el sentido de las agujas del reloj, cada vez a una distancia 1 cm mayor que la anterior. El procedimiento termina cuando con el siguiente corte paralelo ya no es posible cortar ninguna tira. Si las dimensiones de lo que queda de la hoja son $a \times b$, ¿cuál es el máximo común divisor de a, b?

Problema 3. Hay un entero positivo de siete dígitos $abcdefg$. Ninguno de sus dígitos es cero. Los números formados por los dígitos ab, bc, cd, de y efg son todos cuadrados perfectos. Encuentra el número $abcdefg$.

Problema 4. Se tiene un polígono regular de n lados, se escogen dos lados distintos del polígono, y se trazan perpendiculares a esos lados, al intersectarse esas dos líneas se forma un ángulo de 80°. Si se sabe que este ángulo no se podría haber obtenido con ningún otro polígono de menos lados. ¿Cuánto vale n?

Problema 5. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90°$ y $\angle ACB = 30°$. M es el punto medio de BC y la mediatriz de CM interseca a AC en D y el punto medio de AD es N. Si $AB = 1$ calcula BN^2.

Problema 6. Con bloques de madera de colores se construyen "pirámides" de cuatro pisos, con cuatro bloques en el primer piso, tres en el segundo, dos en el tercero y un bloque en el cuarto piso, como la que se muestra a continuación. Se pide, además, que bloques que se tocan sean de distinto color y que no haya pirámides que usen cuatro colores. Si hay 43 bloques azules, 37 bloques rojos, 31 bloques morados y 29 bloques blancos, ¿cuál es el máximo número de pirámides que se podrán construir?



Problema 7. Se tiene una cuadricula de 4×4, en cada fila se ponen los números del 1 al 4 cada uno exactamente una vez. Se suman los números de cada columna, obteniendo cuatro números. Entre esos números, se selecciona el mayor y el menor y se suman. ¿Cual es el mayor valor posible que se puede obtener?

Problema 8. Ariel escribe los números del 1 al 25 y después borra algunos. Los números restantes los separa en dos grupos de tal forma que el producto de los números del primer grupo es igual al producto de los números del segundo grupo. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que pudo quitar Ariel al inicio?

Soluciones de la prueba por equipos (Nivel II)

Solución 1. Los números que buscamos tienen máximo 2024 cifras (son menores a 10^{2024}) y pueden ser de dos formas:

- Tienen un dígito igual a 2 y los demás son ceros. Para contarlos basta elegir en cuál de las 2024 posiciones disponibles estará el 2. Hay 2024 de esta forma.

- Tienen dos dígitos iguales a 1 y los demás son ceros. Para contarlos hay que elegir dos de los 2024 lugares disponibles para poner los 1's. Hay $\binom{2024}{2} = \frac{2024\times 2023}{2} =$ 2 047 276 de esta forma.

Así, hay en total 2 049 300 que cumplen la condición.

Solución alternativa Entre 1 y 10 hay sólo un número que cumple la condición: el 2.

Entre 10 y 10^2 hay dos números que cumplen la condición: 11 y 20.

Entre 10^2 y 10^3 hay 3 números que cumplen la condición: 101, 110 y 200.

Y en general, entre 10^n y 10^{n+1} hay $n+1$ que cumplen la condición: $1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$, $1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}10$, $1\underbrace{0\ldots0}_{n-2}100$, $1\underbrace{0\ldots0}_{n-3}1000$, ..., $11\underbrace{0\ldots0}_{n}$ y $2\underbrace{0\ldots0}_{n}$.

Entonces, entre 1 y 10^{2024}, hay $1 + 2 + 3 + \ldots + 2024 = \frac{(2024)(2025)}{2} = (1012)(2025) =$ 2 049 300 números que cumplen la condición indicada.

Solución 2. A dos lados paralelos de la hoja se les cortarán tiras de anchos impares (1+3+5+...) y a los otros dos lados se les cortarán las tiras pares (2+4+6+...). Mientras las sumas sean menores a 2024 los cortes pueden continuar. Las últimas sumas menores a 2024 son.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 87 = 44^2 = 1936$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 88 = (44)(45) = 1980$$

La siguiente suma sobrepasa 2024.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 87 + 89 = 45^2 = 2025$$

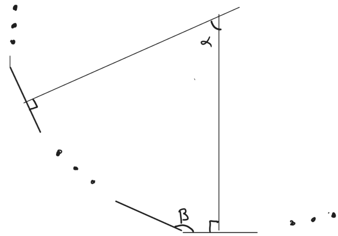
Por lo tanto, después del último corte lo que resta de la hoja tiene dimensiones $2024 - 1936 = 88$ y $2024 - 1980 = 44$. Por lo que $MCD(44, 88) = 44$.

Solución 3. Los cuadrados perfectos sólo pueden terminar en 1, 4, 5, 6 y 9. Como b y c pertenecen ambos a este conjunto de dígitos, pueden ser formar los cuadrados 16, 64 o 49. Pero lo mismo sucede con c y d y con d y e, de manera que se pueden conectar 1649 pero ya no podría seguir ningún otro dígito para formar otro cuadrado perfecto. Se tiene que tomar toda esta cadena.

El valor del dígito a tendría que ser 8 y el cuadrado perfecto de tres dígitos iniciado en 9, será 961.

El número de siete dígitos es 8164961.

Solución 4. Si tenemos el polígono como se muestra a continuación, en donde hay k lados entre los que se trazan las perpendiculares, y el un ángulo del polígono regular mide β



Veamos que se forma un polígono de $k+2$ lados entre las líneas perpendiculares. Por lo que la suma de los ángulos internos de ese polígono miden $180°k$. Notemos que esa suma también se puede escribir como $(k-1)\beta + 2(90°) + \alpha$ (donde α es el ángulo que forman las perpendiculares) entonces tenemos que.

$$180°k = (k-1)\beta + 180° + \alpha$$

$$180°(k-1) = (k-1)\beta + \alpha$$

$$(180° - \beta)(k-1) = \alpha$$

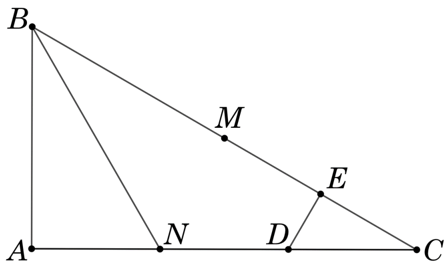
En el problema $\alpha = 80°$ por lo tanto $(180° - \beta)(k-1) = 80°$
así que buscamos buscar el valor de β y k que cumplan, y como queremos minimizar la cantidad de lados, se minimiza mientras β sea menor.

Podemos probar los valores de β para buscar alguno que cumpla.

- Si $n = 3$, $180° - \beta = 120°$, k no es entero.
- Si $n = 4$, $180° - \beta = 90°$, k no es entero.
- Si $n = 5$, $180° - \beta = 72°$, k no es entero.
- Si $n = 6$, $180° - \beta = 60°$, k no es entero.
- Si $n = 7$, $180° - \beta = 51°\frac{3}{7}$, k no es entero.
- Si $n = 8$, $180° - \beta = 45°$, k no es entero.

- Si $n = 9$, $180^\circ - \beta = 40^\circ$, $k = 2$ por lo tanto el polígono pedido tiene 9 lados.

.



Solución 5.

Sea E el punto medio de MC. Como ABC es medio equilátero y $AB = 1$ entonces $BC = 2$ y $AC = \sqrt{3}$. Por tanto $EC = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}$ y como CDE es medio equilátero

$$DE : EC = \frac{1}{2} : CD = 1 : \sqrt{3} : 2$$

Así que $CD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $AD = AC - CD = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Entonces, $AN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

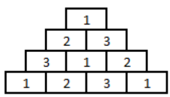
Por último, usando Teorema de Pitágoras en el triángulo BAN tenemos

$$AB^2 + AN^2 = BN^2$$

$$1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = BN^2$$

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = BN^2$$

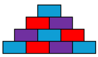
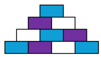
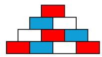
Solución 6. Si utilizamos sólo tres colores: 1, 2 y 3 para colorear la pirámide y comenzamos desde la esquina inferior izquierda, colocando los tres primeros bloques (de distinto color) la coloración de la pirámide queda determinada.

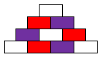
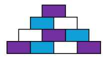


De este modo, cualquier pirámide que construyamos utilizará 4 bloques de un color, 3 bloques de un segundo color y 3 bloques de un tercer color.

Cada pirámide utiliza 10 bloques y tenemos en total $43 + 37 + 31 + 29 = 140$ bloques, entonces máximo podremos formar $140/10 = 14$ pirámides.

Nos falta encontrar la forma de formar esas 14 pirámides o demostrar que no se puede y buscar el nuevo máximo.
Sí se pueden formar 14 pirámides y hay 8 maneras esencialmente distintas, salvo reacomodos de los bloques en cada pirámide.
Una de esas formas es la siguiente:

5× , 2× , 4× ,

2×  y 1× .

Nota. Para encontrar todas las formas de distribuir los bloques en 14 pirámides, podemos hacer lo siguiente:

Digamos que A es el número de pirámides que tienen 4 bloques azules y a es el número de pirámides que tienen 3 bloques azules. De manera similar consideremos, (R, r), (M, m) y (B, b).

Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4A + 3a &= 43, \\ 4R + 3r &= 37, \\ 4M + 3m &= 31, \\ 4B + 3b &= 29. \end{aligned}$$

Veamos las posibilidades de cada ecuación. Como 43 tiene residuo 3 al dividir entre 4, necesitamos que a tenga residuo 1 para que $4A$ sea múltiplo de 4. Haciendo un análisis similar para las otras 3 ecuaciones y considerando que $A + a$, $R + r$, $M + m$ y $B + b$ son todos a lo más 14, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned} (A, a) &= (10, 1), (7, 5), (4, 9), (1, 13); \\ (R, r) &= (7, 3), (4, 7), (1, 11); \\ (M, m) &= (7, 1), (4, 5), (1, 9); \\ (B, b) &= (5, 3), (2, 7). \end{aligned}$$

Ahora tomamos en cuenta que $A + R + M + B = 14$ para ver las distintas posibilidades:

(A,a)	$=$	$(10,1)$	$(7,5)$	$(7,5)$	$(7,5)$	$(4,9)$	$(4,9)$
(R,r)	$=$	$(1,11)$	$(4,7)$	$(1,11)$	$(1,11)$	$(4,7)$	$(4,7)$
(M,m)	$=$	$(1,9)$	$(1,9)$	$(1,9)$	$(4,5)$	$(4,5)$	$(1,9)$
(B,b)	$=$	$(2,7)$	$(2,7)$	$(5,3)$	$(2,7)$	$(2,7)$	$(5,3)$

$(4,9)$	$(4,9)$	$(4,9)$	$(1,13)$	$(1,13)$	$(1,13)$
$(1,11)$	$(1,11)$	$(7,3)$	$(4,7)$	$(4,7)$	$(1,11)$
$(7,1)$	$(4,5)$	$(1,9)$	$(7,1)$	$(4,5)$	$(7,1)$
$(2,7)$	$(5,3)$	$(2,7)$	$(2,7)$	$(5,3)$	$(5,3)$

No es difícil ver que todas las posibilidades son construibles haciendo una tabla para distribuir cómo quedan formadas las 14 pirámides, por ejemplo, a continuación se muestra la tabla con la primera posibilidad:

pirámides	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	total
bloques azules	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	0	0	0	43
bloques rojos	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	37
bloques morados	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0	4	3	3	31
bloques blancos	3	3	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	4	4	31
suma	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	140

Solución 7. Primero se ve que la suma de todos los números en la cuadricula es 40, y que la suma máxima de una columna es 16. Vamos a ver los casos ordenados por cuanto es el valor máximo entre las columnas.

Si el máximo de una columna es 16, entre las otras columnas suman 24, así que el mínimo de una columna es como máximo 8 (si todos son 9 o más la suma de todo es 27) dando como suma 24.

Si el máximo de una columna es 15, entre las otras columnas suman 25, así que el mínimo de una columna es como máximo 8 (si todos son 9 o más la suma de todo es 27) dando como suma 23.

Si el máximo de una columna es 14, entre las otras columnas suman 26, así que el mínimo de una columna es como máximo 8, dando como suma 22.

Si el máximo de una columna es 13, entre las otras columnas suman 27, así que el mínimo de una columna es como máximo 9 dando como suma 22.

Si el máximo de una columna es 12, entre las otras columnas suman 28, así que el mínimo de una columna es como máximo 9, dando como suma 21.

Si el máximo de una columna es 11, entre las otras columnas suman 29, así que el mínimo de una columna es como máximo 9, dando como suma 20.

Si el máximo de una columna es 10, entre las otras columnas suman 30, así que el mínimo de una columna es como máximo 10, dando como suma 20.

El máximo es al menos 10, porque si todos son menores a 10, su máxima suma es 36. Así que lo máximo es 24, y se puede lograr con el siguiente acomodo.

1	2	3	4
1	2	3	4
3	2	1	4
3	2	1	4

.

Solución 8. Como los números deben coincidir en el producto, debe quitar los números primos menores a 25 que aparecen solo una vez, los cuales son el 13, 17, 19 y 23. Luego, el 7 aparece 3 veces ($\{7, 14, 21\}$) por lo que hay que eliminar uno de ellos para que tengamos una cantidad par de factores 7. Si contamos los factores que quedan ($\{2, 3, 5, 11\}$) el 11 aparece 2 veces, el 5 aparece 6 veces, el 3 aparece 10 veces (contando al 21) y el 2 aparece 22 veces (contando al 14) por lo tanto si quitamos el 7 tendríamos que separar los números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$ en dos grupos tal que el producto sea:

$$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$$

Lo cual se puede hacer como sigue:

$$\{1, 2, 3, 5, 8, 11, 14, 15, 18, 20, 24\}, \{4, 6, 9, 10, 12, 16, 21, 22, 25\}.$$

Por lo tanto la menor cantidad de números que debe quitar al inicio es 5.

38° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 4 al 9 de noviembre de 2024 se llevó a cabo en la ciudad de Oaxtepec, Morelos, el 38° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 191 alumnos provenientes de todos los estados del país.

Las y los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Takumi Higashida Martínez (Ciudad de México)
Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León)
Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur)
Javier Caram Quirós (Ciudad de México)
Mateo Latapi Acosta (Ciudad de México)
Juan Luis Manríquez Sequera (Baja California Sur)
Iker Torres Terrazas (Chihuahua)
Juan Pablo de Lira Medina (Aguascalientes)
José Ángel Reynaga Álvarez (Jalisco)
Leonardo Melgar Rubí (Morelos)
Héctor Juan Villarreal Corona (Ciudad de México)
Luis Veudi Vivas Pérez (Quintana Roo)
Emmanuel Buenrostro Briseño (Jalisco)
Luis Ernesto Colunga Lozano (Nuevo León)
Carlos Daniel Maya Rojas (Hidalgo)
Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos)

Ellos forman parte de la preselección que comienza en unas semanas sus entrenamientos intensivos rumbo a la 66 Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO, por sus siglas en inglés) que se realizará el próximo verano en Australia y rumbo a la 39 Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) que se realizará en septiembre del próximo año en Chile.

Las y los 8 alumnos preseleccionados la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 2025 fueron:

Elisa María Villareal Corona (Ciudad de México)
Ángel Isaac Galicia Esquivel (Guerrero)
Maia Berenice Díaz Mondragón (Morelos)
Sebastián Zabala Peña (Nuevo León)
José de la Cruz Pacheco (Guerrero)
Mauro Gonzalo López Rico (Guanajuato)
Kevin Pastenes Rodríguez (Guerrero)
Isaac Azael Juárez Martínez (San Luis Potosí)

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas que se realizará en abril de 2025 en República de Kosovo fueron:

Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos)
Ángela María Flores Ruíz (Sinaloa)
Elisa María Villareal Corona (Ciudad de México)
Dana Karen Medina González (Yucatán)
Isabela Barrera Leal (Jalisco)
Alejandra Muñoz Espín (Morelos)
Eunice Delgado Santisteban Dávila (Chihuahua)
Sofia Constanza Santisteban Dávila (Quintana Roo)
Camila Muñoz Cortés (Tlaxcala)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el 38° Concurso Nacional de la OMM:

1. Ciudad de México (193 puntos)
2. Nuevo León (145 puntos)
3. Jalisco (139 puntos)
4. Baja California Sur (138 puntos)
5. Morelos (110 puntos)
6. Sinaloa (106 puntos)
7. Zacatecas (105 puntos)

8. Chihuahua (96 puntos)
9. Quintana Roo (89 puntos)
10. Aguascalientes (86 puntos)

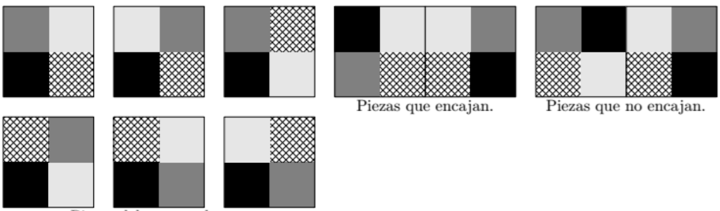
En esta ocasión, el **primer lugar de la copa a la Superación Académica** fue ganado por **Baja California Sur**. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon **Ciudad de México** y **Tlaxcala**, respectivamente.

Problemas del 38° Concurso Nacional de la OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba del 38° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Esta prueba se presenta en dos partes, en días consecutivos, cada parte consiste en un examen de 3 problemas a realizar en el tiempo de 4.5 horas (como máximo) donde los y las concursantes deberán redactar sus soluciones para posteriormente ser evaluadas por un comité de coordinadoras y coordinadores elegidos por el Comité Nacional de la OMM.

Examen día 1

Problema 1. En la figura, se muestran las 6 maneras distintas en que se puede colorear un cuadrado de 1×1 subdividido en 4 cuadritos de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ con cuatro colores distintos (dos coloreados se consideran iguales si es posible rotar uno para obtener el otro). Cada uno de estos cuadrados de 1×1 se usará como pieza de un rompecabezas. Las piezas se pueden rotar, pero no reflejar. Dos piezas *encajan* si al unirlas por un lado completo, los cuadritos de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ a ambos lados del lado por el que se unen son del mismo color (ver ejemplos). ¿Es posible armar un rompecabezas de 3×2 utilizando cada pieza exactamente una vez y de forma que todas las piezas adyacentes encajen?



Piezas del rompecabezas.

Solución 1. (*Solución de Víctor Guzmán Rodríguez*) Observemos que cada lado (rectángulo formado por dos casillas) de cualquier pieza se puede unir exactamente a 2 otras piezas. Si un lado está dentro de la cuadrícula, entonces debe estar tocando alguna de las 2 piezas compatibles, alguna de sus piezas compatibles también debe tener el lado correspondiente en el exterior.

Para evitar ambigüedad, vamos a denotar los colores por x, y, z, w y vamos a denotar cada pieza como una palabra con esas 4 letras, como si estuvieran siendo leídas en sentido horario, comenzando por x.

Ahora intentemos llenar la cuadrícula y fijémonos en una esquina. Supongamos que la pieza es $xyzw$ y sin pérdida de generalidad, que x está en la esquina superior izquierda. De este modo, los lados que quedan en el interior son yz, zw lo cual forzará a que usemos una cuarta letra z.

x	y	y			
w	z	z			
w	z	z			

Procedemos ahora por casos, denotando por a, b, c, d, e las posiciones restantes en las fichas que ya usamos.

x	y	y	a		
w	z	z	b		
w	z	z	b		
c	d	d	e		

Primer caso. Cuando $a = w$, debemos tener $b = x$, y por tanto $d \neq x$, lo cual obliga a que $c = x$, luego $d = y$ y $e = w$.

x	y	y	w		
w	z	z	x		
w	z	z	x		
x	w	w	z		

Este caso es imposible porque ninguna de las dos piezas que faltan tienen algún lado wx o xw.

Segundo caso. Cuando $a = x$, obtenemos $b = w$. En este momento ya tenemos dos piezas con el lado wz, recordando que los lados siempre se leen en sentido horario.

x	y	y	x		
w	z	z	w		
w	z	z	w		

Como lado solo puede aparecer en dos piezas, y la pieza $xwzy$ ya se usó, la pieza que queda en la parte inferior izquierda debe ser $xywz$, lo cual quiere decir que $c = y$, $d = x$, $e = y$.

x	y	y	x		
w	z	z	w		
w	z	z	w		
y	x	x	y		

Pero si colocamos las dos piezas que faltan de manera que sean compatibles con los bordes verticales, obtendremos el arreglo siguiente, el cual es inválido, ya que no coinciden en los bordes interiores horizontales.

x	y	y	x		
w	z	z	w		
w	z	z	w		
y	x	x	y		

Concluimos entonces que es imposible colocar las fichas de forma pedida. $\square$

Problema 2. Determina todas las parejas (a, b) de enteros que satisfacen

- $5 \leq b < a$,
- Existe un número natural n tal que los números $\frac{a}{b}$ y $a-b$ son divisores consecutivos de n, en ese orden.

Nota. Dos enteros positivos x, y son divisores consecutivos de m, en ese orden, si no existe un divisor d de m tal que $x < d < y$.

Solución 2. (*Solución de Leonardo Melgar Rubí*) Dado que a/b es entero, podemos escribir $a = bm$ para algún entero m. Queremos entonces que m y $bm - b = b(m-1)$ sean divisores consecutivos. Observemos que m y $m-1$ son ambos divisores de n, por lo que n es par.

Cuando m es impar, $2m$ será divisor de n y cumple $m < 2m$. Dado que $m, bm - b$ son divisores consecutivos, necesariamente $m < b(m-1) \leq 2m$. Pero $5(m-1) \leq b(m-1)$, de modo que $5(m-1) \leq 2m$, y por tanto $3m \leq 5$, lo cual solo puede suceder cuando $m \leq 1$. Pero si $m = 1$ entonces $a = b$ lo cual contradice las condiciones.

Así, debemos tener m par, por lo que $m = 2k$. Como $m - 1$ es divisor impar de n, tendremos que $2(m-1)$ también lo será.

Pero como $2(m-1) = 2(2k-1) < b(2k-1) = b(m-1)$, para que no haya divisores consecutivos entre m y $b(m-1)$ debe cumplirse $2(m-1) \leq m < b(m-1)$ y así $2(2k-1) \leq 2k$, de modo que $(2k-1) \leq k$, lo cual solo puede suceder cuando $k = 1$. Pero $k = 1$ quiere decir $m = 2$ y por tanto $5 \leq b \leq 2b = a$.

Dado que $2, b$ son divisores consecutivos de n, y siendo $b > 4$, necesariamente b será un primo p y obtenemos que $(a, b) = (2p, p)$, que se puede verificar que sí cumplen las condiciones pedidas.

Por tanto, las parejas buscadas son las de la forma $(2p, p)$ con p un primo mayor o igual a 5. $\square$

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo, y sean A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1 los puntos medios de AB, BC, CD, DE, EF y FA, respectivamente. Se construyen los puntos A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 y F_2 en el interior de $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tales que:

- El dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ tiene sus 12 lados iguales y
- $\angle A_1B_2B_1 + \angle C_1D_2D_1 + \angle E_1F_2F_1 = \angle B_1C_2C_1 + \angle D_1E_2E_1 + \angle F_1A_2A_1 = 360°$, donde todos los ángulos son menores a 180°,

prueba que $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ es cíclico.

Nota: El dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ tiene forma de estrella de seis picos, donde los picos son A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1.

Solución 3. (*Solución de Takumi Higashida Martínez*) Sea O_1 el circuncentro de $\triangle ACE$ y sea O_2 el circuncentro de $\triangle BDF$. Si N es el punto medio de O_1O_2, demostraremos que los seis puntos $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ equidistan de N. Para simplificar la redacción denotemos por r a la medida de los lados del dodecágono.

Notemos primero que es posible formar un triángulo $\triangle XYZ$ con circuncentro T tal que $\angle XTY = \angle A_1A_2F_1$, $\angle ZTX = \angle C_1C_2B_1$, $\angle YTZ = \angle E_1E_2D_1$, y $XT = YT = ZT = r$, puesto que los tres ángulos mencionados tienen una suma igual a 360°. Básicamente, estamos pegando los triángulos $\triangle B_1C_2C_1$, $D_1E_2E_1$ y $F_2A_2A_1$.

Como F_1 y A_1 son puntos medios, $F_1A_1 = FB/2$, y de forma similar, $B_1C_1 = BD/2$, y $D_1E_1 = DF/2$. Concluimos que $\triangle XYZ$ es semejante a $\triangle BFD$. En particular, $\triangle XTY$ es semejante a $\triangle BO_2F$, pero $\triangle XTY \cong \triangle A_1A_2F_1$, por lo que $\triangle A_1A_2F_1$ y $\triangle BO_2F$ son semejantes en razón $1 : 2$.

Adicionalmente, los paralelismos dados por los puntos medios establecen que $\triangle A_1A_2F_1$ y $\triangle BO_2F$ son homotéticos y como FF_1 corta a BA_1 en A, la homotecia tiene centro en A. Además, como F_1 es punto medio de AF y F_1A_2 es paralela a FO_2, se sigue que A_2 es el punto medio de AO_2. Análogamente, $C_2 y E_2$ son los puntos medios de CO_2 y EO_2 respectivamente.

El mismo argumento establece que B_2, D_2, F_2 son los puntos medios de O_1B, O_1D y O_1F respectivamente y por las semejanzas tenemos $O_2F = 2A_2F_1 = 2A_1B_2 = AO_1$ por lo que los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle BDF$ tienen el mismo circunradio.

Finalmente, consideremos la homotecia con centro en O_2 que manda $\triangle AEC$ en $\triangle A_2E_2C_2$, la cual manda O_1 en N, por lo que N es el circuncentro de $A_2E_2C_2$ y $NA_2 = O_1A/2$.

Por un argumento análogo, N va a ser el circuncentro de $\triangle B_2D_2F_2$ y $NB_2 = O_2B/2$ y como $O_2B = O_1A$ (el circunradio), A_2, B_c, C_2, D_2, E_2 y F_2 equidistan de N, con lo que termina la demostración. $\square$

Examen día 2

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y sea M un punto del segmento BC. La recta por M y perpendicular a BC, corta a las rectas BH y CH en los puntos P y Q, respectivamente. Muestra que la recta AM pasa por el ortocentro del triángulo HPQ.

Solución 4. (*Solución de Sebastián Montemayor Trujillo*) Sea ℓ la línea que pasa por H y es paralela a BC. Dado que $PM \perp \ell$, el ortocentro H' de $\triangle PHQ$ estará siempre sobre ℓ.

Consideremos las funciones (perspectivas) siguientes de líneas en líneas (no segmentos):

- $f : BC \to \ell$ tal que si $X \in BC$, entonces $f(X)$ es la intersección de AX con ℓ (una perspectiva desde A).
- $g : BC \to BH$ tal que si $X \in BC$, entonces $g(X)$ es la intersección con BH de una paralela a AH que pasa por M (una perspectiva desde el punto al infinito en la dirección de AH).
- $h : BH \to \ell$ tal que si $X \in BH$ entonces $h(X)$ es la intersección con ℓ de una línea paralela a AB que pasa por X (una perspectiva desde el punto al infinito en la dirección de AB).

Observemos que $g(M) = P$ y que $h(g(M)) = H'$. Además, siendo f, g, h mapeos proyectivos, para probar que $f = h \circ g$ basta probar que coinciden en tres puntos no colineales.

Primero, $f(B)$ es, por construcción, la intersección de AB con ℓ,la cual denotaremos por S. Como $B \in BH$, $g(B) = B$, y por construcción $h(B) = S$. Por tanto $f(B) = h(g(B))$.

Por otro lado, sea $W = g(C)$ el punto de corte de la perpendicular a BC que pasa por C con BH, y $h(g(C))$ está en una línea que es paralela a AB y, por tanto, perpendicular a CH, al mismo tiempo de que está en ℓ, por lo que está en una perpendicular a CW, de modo que $h(g(C))$ es el ortocentro del triángulo HCW. Pero $f(C)$ es también el ortocentro de dicho triángulo, al estar por construcción sobre ℓ, que es altura de HCW y sobre $AC \perp HW$. Concluimos así que $f(C) = h(g(C))$.

Finalmente, tomando D como el pie de la perpendicular desde A en BC, tenemos $f(D) = H$ y, por otro lado, $g(D)$ también es igual a H, pero como $h(H) = H$ al estar H en ℓ, concluimos $f(D) = h(g(D))$.

Lo anterior quiere decir que f y $h \circ g$ son el mismo mapeo proyectivo, y como habíamos establecido que $h(g(M)) = H'$, tendremos que $f(M) = H'$, pero como $f(M)$ por construcción está sobre AM, concluimos que H' pertenece a AM. □

Problema 5. Sean A y B conjuntos infinitos de números reales positivos tales que:

- Para cualquier par de elementos $u \geq v$ de A, se cumple que $u + v$ es un elemento de B.

- Para cualquier par de elementos $s > t$ de B, se cumple que $s - t$ es un elemento de A.

Prueba que $A = B$ o existe un número real r tal que $B = \{2r, 3r, 4r, 5r, \dots\}$.

Nota: Un conjunto es una colección de objetos tal que cada objeto aparece a lo más una vez dentro del conjunto. A estos objetos se les denomina *elementos* del conjunto.

Solución 5. (*Solución de Juan Luis Manríquez Sequera*) Si $r \in A$, entonces $2r = r+r \in B$, y que si $x < y$ son dos elementos de A, entonces tanto $x + y$ como $2y$ estarán en B, pero como $2y > x + y$, tendremos $y - x \in A$. Finalmente, la primera condición, aplicada a $y - x$ con x nos arroja $y \in B$.

Consideremos primero el caso en que A no tiene un elemento mínimo, es decir, para todo $x \in A$ es posible encontrar $y \in A$ tal que $x > y$. Por la observación anterior, concluimos que $x \in B$ y por tanto $A \subseteq B$.

Veamos también que $B \subseteq A$. Sean $x > y$ elementos de B y consideremos dos subcasos.

Primero, si existe algún entero positivo k mayor a 1 tal que $x = yk$. Aquí, la segunda propiedad nos dice que $x - y = yk - y = y(k - 1)$ estará en A, pero como $A \subseteq B$, $y(k - 1) \in B$. Repetimos este argumento para obtener que $y(k - 2), y(k - 3), \dots y(1) = y$ son todos elementos tanto de A como de B, por lo que en particular, $y \in A$.

En caso contrario, podemos encontrar un entero positivo k tal que $y(k+1) > x > yk$. Pero como $x - y \in A$ debido a la primera condición, $x - y \in B$ puesto que $A \subseteq B$. Aplicamos la segunda condición a $x - y$ con y y obtenemos $x - 2y$ y luego que $x - 3y$, $x-4y$, y así sucesivamente hasta $x-ky$ son todos elementos de A y por tanto también de B. Mas, como $x < y(k+1)$, deducimos $x-ky < y$ por lo que $y-(x-ky) = y(k+1)-x \in A$ (y por tanto también está en B). Finalmente, dado que $y(k + 1) - x$ y $y - x$ están en A, la diferencia yk está en B. Si $k \geq 2$, por el primer subcaso, concluimos $y \in A$, mientras que si $k = 1$, se cumple $y < x < 2y$ y como tanto x como $x - y$ están en B, la diferencia y estará en A.

De ambos subcasos concluimos que, bajo el supuesto de que A no tiene mínimo, el hecho de que $x < y$ implica $y \in A$. Si B no tuviese un máximo, un argumento parecido al mencionado antes haría que $B \subseteq A$ y por tanto $B = A$. Por ello, supongamos que B sí tiene un elemento máximo, al cual denotaremos por m. El argumento anterior garantiza que cualquier $x \in B$, distinto de m, está en A. Cuando $m \in A$, obtenemos $B \subseteq A$ y por tanto $B = A$, de manera que supondremos ahora que m no es un elemento de A.

Mas, como $A \subseteq B$ y m es el máximo de B, tenemos que $x \in A$ implica $x < m$. Pero como $x \in A$ implica $2x \in B$, sucede $2x \leq m$ y por tanto $x \leq m/2$. Sea y cualquier elemento de A que cumpla $y < m/2$. Al estar en A, cumple $y \in B$ y como $y < m$, $m - x \in A$. Sin embargo, $m - x > m/2$ lo cual es una contradicción con que todo elemento de A es menor o igual a $m/2$.Esta contradicción demuestra que si B tiene elemento máximo, debe estar en A y como mencionamos antes, $B \subseteq A$.

Todo lo anterior expuesto demuestra que si A no tiene elemento mínimo, entonces $A = B$, pero falta considerar el caso en que A tiene un elemento mínimo, al que denotaremos por r.

Sea d un elemento de A y expresemos $d = ra + c$ donde r es un entero y $0 < c \leq r$. Pero como dedujimos al inicio, $x < y$ implica $y - x \in A$, por lo que aplicando varias veces esa afirmación con $r = x$, obtenemos que $r(a-1) + c, r(a-2) + c, \dots r + c, c$ son elementos de A. Pero $c \leq r$ y r es el mínimo de A, lo cual puede suceder solamente si $c = r$, lo cual quiere decir que $= r(a+1)$. En otras palabras, todos los elementos de A deben ser múltiplos enteros de r.

Aplicando el mismo argumento con rk y r, obtenemos que $r(k-1), r(k-2), \dots r$ son todos elementos de A, y como A es infinito, podremos encontrar elementos rk tan grandes como se desee, con lo que se deduce que A necesariamente es el conjunto $\{r, 2r, 3r, \dots\}$.

Es fácil ver que la primera propiedad implica que $\{2r, 3r, 4r, \dots\}$ son elementos de B. Supongamos que $x \in B$ es un elemento que no es de la forma kr con k entero. Entonces podemos encontrar un valor entero a apropiado que cumpla $ar > x$ y por tanto $ar - x$ será un elemento de A, pero no será de la forma kr, lo cual es una contradicción.

Para recapitular, cuando A tiene un elemento mínimo r, $A = \{r, 2r, 3r, 4r, \dots\}$, además B contiene a $\{2r, 3r, 4r, \dots\}$, y no contiene elementos que no sean múltiplos enteros de r. Cuando $r \in B$, esto quiere decir que $A = B$, mientras que si $r \notin B$, $B = \{2r, 3r, 4r, \dots\}$, con lo que concluye la demostración. $\square$

Problema 6. Ana y Beto juegan en un pizarrón donde se han colocado los números del 1 al 2024. En cada turno Ana escoge tres números a, b, c escritos en el pizarrón y en su turno Beto los borra y reescribe alguno de los números

$$a + b - c, a - b + c, \text{ ó } -a + b + c.$$

El juego termina cuando quedan solamente dos números y Ana no puede hacer su jugada. Si la suma de los números que quedan al final es múltiplo de 3, Beto gana. En caso contrario, gana Ana ¿Quién puede asegurar su victoria?

Solución 6. (*Solución de Alonso Baeza Quevedo*) El problema se presta de forma natural a considerarse módulo 3, dado que en realidad los valores concretos de los números en la pizarra no importan sino únicamente sus residuos módulo 3. Así, en lo sucesivo daremos por hecho que todos los valores escritos solo pueden ser $0, 1$ o 2.

El juego termina cuando hay solo dos números, por lo que en el paso anterior debe haber siempre cuatro números en la pizarra. Podemos hacer una lista de todas las posibilidades para esos cuatro números a_1, a_2, a_3, a_4 (considerando permutaciones como casos equivalentes), y determinar en cada caso quién ganará el juego.

a_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0
a_2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	0	0
a_3	2	2	2	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
a_4	2	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
GANA:	A	B	A	A	A	B	B	A	B	A	A	A	B	A	B

El análisis de cada columna es similar al siguiente. Por ejemplo si los valores son $(2, 2, 2, 1)$ (segunda columna), entonces Beto puede ganar, ya que los tres números elegidos por Ana serán $2, 2, 2$ o $2, 2, 1$ (módulo 3), en el primer caso se reemplazan por 2 y en la pizarra quedan $2, 1$ cuya suma es múltiplo de 3, mientras que en el segundo caso Beto los cambia por $2+1-2 = 1$ y como el cuarto número es 2, en la pizarra queda $2+1$ que es múltiplo de 3, por lo que Ana no puede evitar que Beto gane.

Sin embargo, si los cuatro números fueran, por ejemplo, $(2, 2, 1, 1)$ (quinta columna), entonces Ana puede elegir $2, 2, 1$ y si Beto los cambia por $2+1-2$, en la pizarra quedaría $1, 1$ que no tiene suma igual a un múltiplo de 3, mientras que si Beto los cambia por $2 + 2 - 1$, en la pizarra quedaría $0, 1$ que tampoco tienen suma igual a un múltiplo de 3. Entonces en este caso Ana gana siempre porque Beto no puede lograr su objetivo.

Un análisis parecido se realiza en cada una de las columnas de la tabla para determinar quién ganaría en ese caso. Sean b_0, b_1, b_2 la cantidad de ceros, unos y doses en la pizarra.

Observemos que antes del final, cuando b_0 es positivo (hay ceros), entonces Beto gana cuando la b_0 es par y pierde cuando b_0 es impar.

Ahora analicemos lo que sucede en cualquier jugada. Si los tres números elegidos son múltiplos de 3, se van a borrar 2, por lo que la cantidad total desciende en 2. Si hay dos de los números elegidos iguales a 0 (módulo 3), digamos $0, 0, a$, entonces Beto los reemplaza por $0 + 0 - a$ y reduce la cantidad total de ceros en 2. Si no hay múltiplos de 3, la cantidad de ceros se mantiene. Así, nos falta considerar el caso en que Ana elige solo un múltiplo de 3.

Cuando Ana elige (módulo 3) los números $0, a, a$, siendo a igual a 1 o 2, Beto los reemplaza por $a+0-a$ y mantiene la cantidad de ceros. Si Ana elige los números $0, 1, 2$, Beto los reemplaza por $1 + 2 - 0$ y mantiene la cantidad de ceros.

Las observaciones anteriores nos dicen que Beto siempre puede mantener la paridad de la cantidad de ceros, que, al inicio del juego, es par porque hay $b_0 = 674$ múltiplos de 3. De esta manera, si antes del final del juego aún quedara algún cero, por paridad tendrían que ser 2 o 4 y por tanto Beto ganaría.

Lo anterior quiere decir que Ana intentará eliminar todos los ceros antes de que termine el juego. El análisis anterior nos muestra que la cantidad de ceros únicamente desciende cuando los tres números elegidos son de la forma $0, 0, a$ con $a = 1$ o $a = 2$.

Acudiendo nuevamente a la tabla, observamos que si se acaban los ceros, Beto solo gana en las combinaciones $(2, 2, 2, 1)$ y $(2, 1, 1, 1)$, es decir, cuando b_1 y b_2 son impares con diferencia igual a 2.

Al inicio del proceso hay $b_1 = 675$ números congruentes a 1 y $b_2 = 675$ números congruentes a 2. Analicemos cada una de las posibles elecciones de tres números que puede hacer Ana y que podrían afectar a b_1 o b_2.

Cuando Ana escoge $1, 1, 1$ o $2, 2, 2$, Beto añade respectivamente 1 o 2 y se mantienen las paridades de b_1 y b_2. Si Ana escoge $2, 2, 1$ o $2, 1, 1$, entonces Beto los reemplaza respectivamente por $2 + 1 - 2$ y $1 + 2 - 1$, manteniendo la paridad de b_1 y b_2.

Cuando Ana elige $1, 0, 0$ o $2, 0, 0$, habíamos determinado que la estrategia de Beto era cambiar por $0 + 1 - 0$ o $0 + 2 - 0$ para cuidar la paridad de los ceros, pero esta estrategia también mantiene la paridad de b_1 y b_2. Ciertamente la elección $0, 0, 0$ no puede modificar la paridad de b_1 ni de b_2.

Finalmente, si Ana elige $0, 1, 2$, habíamos dicho que Beto los reemplazaría por $1+2-0$, pero este cambio *modifica* las paridades de b_1 y b_2 simultáneamente.

Ya que b_1 y b_2 comienzan ambos con la misma paridad (impar pues al principio cada uno es 675), entonces para que Ana pueda lograr que haya una cantidad par de ambos debe elegir la combinación $0, 1, 2$ una cantidad impar de veces.

Además, en el paso previo a eliminar todos los ceros, Ana debe de hacerlo de alguna de dos formas, puede elegir la terna $0, 0, 2$ o la terna $0, 0, 1$. Si cuando se hace este paso b_1, b_2 son impares (como a Beto le conviene), Beto deberá mantener dicha paridad. Es decir, en el caso de que Ana elija $0, 0, 2$, Beto los reemplaza por $0 + 2 - 0$ para mantener la paridad, análogamente cuando Ana elije $0, 0, 1$.

Por otro lado, si b_1, b_2 son pares cuando se elije la última combinación con ceros, Beto querrá modificar la paridad de b_1 y b_2. Lo cual es posible, ya que si Ana elije $0, 0, 2$, Beto los puede reemplazar por $0 + 0 - 2$ que quita un 2 y agrega un 1 modificando la paridad de b_1 y b_2. Análogamente si Ana elije $0, 0, 1$, Beto los reemplaza por $0 + 0 - 1$, modificando de igual manera la paridad.

Dado que posterior a este paso, cualquier combinación que elija Ana de los números en la pizarra no contiene ceros, por el análisis que hicimos previamente, la paridad de b_1 y de b_2 se mantiene, y como Beto puede elegir la paridad en el último paso donde haya ceros, entonces Beto siempre tiene manera de asegurar la victoria, ya que elegirá que b_1 y b_2 sean impares. $\square$

Voces de la comunidad olímpica

Bienvenidos y bienvenidas a esta nueva sección de la revista, donde en cada número publicaremos un mensaje de algunos miembros de la comunidad olímpica. El objetivo es poder dar a conocer las diferentes experiencias y perspectivas que nacen a partir de la experiencia de haber participado en la olimpiada y como es que este concurso, se compone de muchas más cosas que un examen. Si quisieras compartir tu experiencia, ya sea que actualmente sigas participando, ya seas olímpico/a, seas entrenador/a, padre de familia, parte de un comité, envía tu escrito al correo:

revistaomm@gmail.com

y con gusto te leeremos para considerar publicarte en un siguiente número.

Esperamos disfruten de leer esta nueva sección tanto como nosotros disfrutamos crearla.

Ángela María Flores Ruíz (SIN)

Olímpica preseleccionada para participar en la EGMO 2025

Mi nombre es Ángela María Flores Ruiz, tengo 17 años y soy olímpica del estado de Sinaloa desde el 2020. Todo comenzó con mi primer acercamiento a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB). Cursaba mi primer año en la secundaria cuando encontré la convocatoria. A decir verdad, ya tenía tiempo esperándola , puesto que la anterior me había llegado demasiado tarde. Al toparme con ella, no dudé ni un segundo en inscribirme. Todo era muy distinto a lo que imaginaba, empezando por los problemas: eran muy diferentes a lo que estaba acostumbrada, pero de una manera muy buena . En mis primeros días descubrí una satisfacción que ninguna otra cosa me había dado nunca: la de resolver un problema del cual no sabía nada, ni siquiera una fórmula, pero que era capaz de hacer mediante mucho tiempo y esfuerzo. Desde el día uno me enganché, y a partir de ese momento y hasta ahora, mi vida empezó a girar alrededor de la olimpiada y los problemas de matemáticas; encontré lo que de verdad me apasionaba.

Todo era muy bonito y divertido, pero lo cierto es que yo tenía muy poca experiencia y pocos conocimientos. Además, tuve la fortuna de pertenecer a uno de los estados con la comunidad olímpica más fuerte y estructurada, por lo que había muchas personas más experimentadas que yo. Esto fue intimidante para mí, pero definitivamente no me detuvo de hacer lo que disfrutaba, independientemente del resultado. Creo que eso me ayudó a mejorar mucho en poco tiempo y a pasar de los últimos puestos en el estado al tercero, lo que me permitió participar en el nacional de la OMMEB,lastimosamente virtual por la pandemia, donde obtuve una medalla de bronce. Sin embargo, más que la medalla, lo que obtuve fue mucha motivación para seguir mejorando, mayormente gracias a Emilio Domínguez, mi primer entrenador. Él no solo me enseñó matemáticas, también me dio toda la confianza que necesitaba para continuar.

Después de este nacional, el año se fue volando entre problemas y pandemia, por lo que, en poco tiempo, ya estaba de nuevo en mi segundo y último nacional de la OMMEB, esta vez como una persona distinta. La olimpiada en Sinaloa me había cambiado mucho, pero definitivamente para mejor. Así fue como, en 2021, obtuve mi primera medalla nacional de oro y descubrí sensaciones que no me creía capaz de sentir: orgullo. Estaba realmente orgullosa de mi trabajo y de mi esfuerzo, por primera vez lo veía en mis manos. Fue indescriptible toda la felicidad que sentí al enterarme de lo que había logrado.

Con esta medalla vino mi primera preselección a olimpiadas internacionales (la IMC) y mis primeros entrenamientos nacionales, que, a pesar de ser en línea, me marcaron enormemente. Entendí que estos entrenamientos no solo te enseñan matemáticas, sino que también te conectan con muchas personas que comparten pasiones, gustos y estilos de vida muy similares entre sí.

Fue en la olimpiada donde encontré el lugar en el que al fin encajé.

En este mismo 2021, la OMMEB naturalmente me conectó con la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), donde, a pesar de seguir siendo matemáticas, todo cambió.

En este lugar encontré mi segunda familia, una que sé que siempre estará para mí y me acompañará. Al principio fue difícil porque, a pesar de haber obtenido oro en la OMMEB, la OMM tenía un nivel muy distinto. Por eso tuve que volver a trabajar muy duro para escalar en las listas de preselección e intentar ser parte de la delegación de Sinaloa para la OMM de ese mismo año. Afortunadamente, y gracias a el apoyo de los entrenadores sinaloenses, logré crecer lo suficiente como para colocarme entre los 6 representantes del estado en la competencia nacional.

Es indescriptible, lo mucho que aprendí y lo mucho que crecí a partir de ahí.

Ese año logré una medalla de bronce en el nacional, además de una preselección a la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC). Sentía que todo iba viento en popa y que nada me detendría a partir de ahí, no contaba con que aún me faltaba mucho por aprender. Y no hablo solo de matemáticas, sino de lecciones de vida.

Describiría el 2022 como un caos para mí. Sentía que venía derrota tras derrota, iniciando con una medalla de plata en el nacional femenil, continuando con mi descalificación en las dos preselecciones internacionales (IMC y OMCC), y lo que eventualmente concluyó con otra medalla de bronce en la OMM de este mismo año, donde obtuve el puntaje mínimo para la medalla. Me encontraba decepcionada, triste y perdida. Llegué a creer que todo el esfuerzo era en vano y que de, alguna manera, eso había dejado de ser "lo mío".

Pero fue justo ahí cuando las personas a mi alrededor estuvieron más presentes que nunca, sobre todo mi equipo, Sinaloa. Las relaciones y vínculos que había formado fueron lo que no me dejó rendirme. Fueron ellos quienes creyeron en mí, aún cuando yo no lo hacía. Mis entrenadores: Crisanto, los Emilios, Luis A, Lupita... y mis amigos: Fer, Marce, Rebe, Rolando, Camila ... estuvieron siempre ahí, apoyando y respaldando todos mis pasos.

Pero los capítulos de la vida son finitos, A partir de aquí todo fue crecimiento para mí. Y claro, con este vinieron más altas y bajas, y soy consciente de que seguirán ocurriendo. Pero he aprendido, gracias a la olimpiada, que siempre hay una persona que pasó por algo similar y que está dispuesta a ayudar. Siempre habrá alguien que te pueda escuchar, y nunca faltarán personas que, sin importar lo que pase, se mantendrán ahí para apoyarte y respaldarte.

El 2023 me trajo muchas cosas buenas, empezando con una medalla de oro en la olimpiada nacional femenil, la cual me motivó muchísimo y me dio mucha confianza para seguir haciendo lo que me gusta. De esta misma salió mi preselección para la Pan American Girls' Mathematical Olympiad (PAGMO, la cual concluyó con una selección y participación en Costa Rica. Esta fue mi primera vez en una olimpiada internacional y, no solo eso, también fuera del país. Recuerdo la emoción que sentí la primera vez que usé el suéter con la palabra "México" en él: era sorprendente que, después de tanto soñarlo y admirar a otras personas hacer lo mismo, se había hecho una realidad para mí. No podía creer que fuese yo la que estaba yendo a otro país, portando la playera mexicana y todas mis ganas, solo para hacer un examen de matemáticas. Y bueno, así como era en mis sueños, también fue en la realidad. Fue impresionante: cada paso dado en esa olimpiada fue un aprendizaje increíble. Conocí a tantas personas, culturas e incluso idiomas y me enriquecí en todo aspecto. La PAGMO, para mí, sobre todo fue la evidencia de las cosas que podía lograr y de los saltos que puedo llegar a dar. Entendí que no solo era capaz de lograr cosas aquí en mi país; también era capaz de alcanzar metas fuera de este y que mis sueños, en efecto, se podían hacer realidad. Al final, obtuve la medalla de plata, que junto con las de Andrea y Sofi fueron las tres platas más altas de la competencia, y Eunice obtuvo la medalla de bronce.

Quiero darle las gracias a Myriam y Kenya, que siempre nos estuvieron acompañando, no solo de forma física como tutoras, sino como amigas que estaban sobre todo emocional y anímicamente para nosotras. Las quiero.

Después de esto, volví al nacional de la OMM, pero esta vez con mucha más fuerza, ganas y, sobre todo, con más personas que me apoyaban incondicionalmente. Fue gracias a esto que pude obtener la medalla de oro. Tener esta medalla entre mis manos es algo para lo que nunca me había preparado. Sí, es cierto que sabía que en algún momento podría pasar, pero ni en todos mis sueños imaginé ese sentimiento de alegría y satisfacción. Esa medalla era algo por lo que había trabajado mucho tiempo y por lo que me había esforzado bastante, y al fin la tenía entre mis dedos. Era increíble para mí pensar que apenas un año atrás estaba rozando la medalla de bronce y ahora tenía un oro que me pertenecía.

Esta medalla y el haber obtenido el segundo puntaje femenino más alto hicieron que quedara preseleccionada para la International Mathematical Olympiad (IMO) y European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO), lo que significa iniciar el proceso de entrenamientos nacionales. Estos constan de 10 días de entrenamientos intensivos casi cada mes, en los que, además de entrenar, realizamos exámenes selectivos para las preselecciones en las que cada una se encuentra.

Estos entrenamientos no solo son la puerta a las olimpiadas internacionales, a los que todos aspiramos, sino que también simbolizan la posibilidad de reencontrarte con amigos de otros estados que, por cuestiones geográficas, no vemos a menudo. Obviamente, también representan el acceso a miles de nuevas experiencias y conocimientos, por lo que, claro, es difícil que esta etapa no sea la más importante y divertida para muchos de nosotros. Personalmente ya había tenido cierta cercanía a estos entrenamientos debido a mi preselección a la OMCC, el primer año, pero, a decir verdad, había pasado bastante tiempo desde entonces y no permanecí mucho tiempo en ellos, así que me sentía igual de curiosa y nerviosa que como si fuera mi primera vez. Sin embargo, este sentimiento me duró poco, ya que en el primer entrenamiento virtual encontré a quienes considero mi familia (también conocida como Nataea): Isa, Roge, Juan Luis, y, quien después se nos uniría, Héctor. Son personas con las que, desde entonces, pasé casi todo mi tiempo, y no solo en entrenamientos. Se construyó una amistad tan fuerte que el contacto entre nosotros era casi diario. Aprendí mucho de ellos, pero más que nada encontré el lugar donde me siento 100 % cómoda y donde puedo ser yo misma. Y, así como ellos, también creé nuevas relaciones como con Nacho y Lalo, personas que constantemente han estado para mí, sobre todo cuando necesito escuchar algún consejo. También reforcé algunas amistades ya hechas: Emmanuel, Sofi, Andrés, Emi, Vicky, Takumi, Alonso, Cams, Andrea... entre muchas otras. Gracias a todos por siempre estar ahí y sacarme una sonrisa cuando más lo necesitaba.

En esta temporada me dediqué a dos cosas fundamentalmente: aprender y disfrutar. Ambas fueron bastante sencillas puesto que siempre conté con el apoyo necesario (gracias, Roge, por todo lo que me enseñaste y toda la paciencia que tuviste conmigo). Esto creo que facilitó mucho mi el proceso de preselección en las olimpiadas, especialmente para la EGMO, ya que logré clasificar en el tercer puesto para la delegación que representó a México en el 2024 en Georgia.

Estar en el equipo de la EGMO es otra de esas cosas que sonaban imposibles para mí. Era ese sueño que veía muy lejano pero que de verdad añoraba, donde constantemente observaba a mis ídolas: Rebe, Ana Pau, Vicky, Ana Illanes, Olga, Cams, las Andreas, entre otras, hacer cosas increíbles y resolver exámenes de un nivel al que jamás pensé en enfrentarme. Pero ahí estaba yo: después de ese proceso resulté ser seleccionada y ahora era mi turno de enfrentarme a ello. Creo que, incluso ahora, después de tanto tiempo, no logro asimilar que soy la misma persona que estuvo ahí, en el banner del equipo mexicano. Y no solo eso: también obtuve una medalla de bronce, al igual que Andrea y Vicky, mientras que Isa recibió una mención honorífica.

Hablar de la EGMO y todas las nuevas experiencias que viví sigue siendo igual de emocionante que el primer día. Esta fue tanto mi primera vez visitando Europa (en países como Alemania, España y Georgia) como mi primera vez participando en una olimpiada tan grande y con tantas culturas mezcladas, como la asiática, europea, norteamericana, latinoamericana, etc. También fue mi primera vez hablando completamente en inglés con personas que no hablaban español y experimentando climas muy distintos a los de mi ciudad. Comí cosas deliciosas que, al recordarlas, aún me hacen agua la boca y formé amistades que hasta hoy son de las más importantes para mí.

Las olimpiadas de matemáticas, sobre todo las internacionales, son esos lugares donde puedes hacer exámenes súper complejos, y al día siguiente, encontrarte enseñándole a 50 personas cómo bailar "El payaso del Rodeo" en un balcón con una bocina pequeña, o mostrando palabras y frases mexicanas a personas que quizás nunca habían escuchado español. Incluso puedes terminar bailando "Despacito" mientras subes los pisos de un edificio, y asombrosamente todos la reconocen y bailan contigo.

Gracias a mi equipo: Vicky, Andrea e Isa, por estar unas para las otras y compartir momentos tan especiales conmigo. También gracias de nuevo a Myriam y Ana Pau por su acompañamiento y guía en esta competencia, y más que nada, por hacernos sentir en casa cuando estábamos tan lejos de ella.

Al término de la EGMO 2024, recordé que mi tiempo en la olimpiada estaba próximo a terminar y que en pocos meses sería mi última OMM como participante. Así que me propuse disfrutar al máximo el tiempo que me queda en la olimpiada. Regresé a entrenar, no solo conmigo misma, sino también volví a entrenar a los niños más pequeños (los de OMMEB), ya que algo que tengo claro, es que lo mínimo que puedo hacer para devolverle a la olimpiada lo mucho que me ha dado, es hacer lo mismo que otros hicieron por mi: enseñar y acompañar durante el proceso. Y eso es parte de lo que he estado haciendo en el estado de Sinaloa y, lo que pretendo seguir haciendo por mucho más tiempo.

No pasó mucho tiempo hasta que ya tuvimos equipo nuevamente para la olimpiada nacional, que estuvo conformado por: Karen, Iván, Elías, Axel, Henrry y yo, además del equipo de delegados, codelegados y entrenadores: Selomit, Crisanto, Marce, Luis A., Victor, los Emilios, entre otros, quienes, a pesar de las dificultades debido al estado de inseguridad en Sinaloa, encontraron alternativas igual de eficaces para seguir enseñándonos y apoyándonos en los entrenamientos, y nunca nos dejaron desmotivarnos ni pensar que no éramos capaces de lograr grandes cosas. Agradezco mucho siempre haber tenido un lugar donde pude expresar mis preocupaciones y miedos sin temor a ser juzgada, y al contrario, siempre supe que me apoyarían y darían las palabras necesarias para continuar.

Tristemente, durante este periodo conté con obstáculos tan aleatorios como el dengue. Después de toda una vida de haber evadido esta enfermedad, logré contraerla justo antes de la partida al nacional. Pero de nuevo, mi propósito era claro: disfrutar, y eso fue exactamente lo que hice. Es cierto que la enfermedad me impidió sentirme como me hubiera gustado y probablemente me restó la capacidad de concentración que necesitaba, pero lo que nunca pudo fue evitar que yo disfrutara esa OMM. El examen, como la mayoría, me encantó, y sorprendentemente me gustó hasta el problema menos agradable para casi toda la comunidad. Claro, me habría encantado sentirme al 100 % para hacerle más honor a ese bonito examen, pero de igual forma me esforcé todo lo que pude y eso fue suficiente para obtener la medalla de plata. Y de nuevo, vienen muchos sentimientos con esto. Hay muchos “hubiera”, “si me hubiera concentrado un poco más habría visto esto...”, “si hubiera continuado con esta idea por unos minutos más..”, “si no me hubiera quedado atrapada en esta idea...” y sobre todo “si hubiera sacado dos puntos más, el oro habría sido mío”. Pero para este punto, la experiencia me dejó muy claro algo: los “hubiera” definitivamente no existen, y más aún, estas experiencias tan enriquecedoras son limitadas, así que no hay tiempo para el “hubiera”, solo queda tiempo para el ahora. Solo nos queda tiempo para disfrutarnos los unos a otros, para reír otro rato, jugar otro juego de cartas, un asesino de papelitos, un karaoke más, o un último estimatón. Y así como la vida, la olimpiada es una experiencia que viviremos solo una vez, por lo que debemos disfrutarla siempre al máximo y con nuestra más grande sonrisa. Para mí, sueños como la IMO desaparecieron con esta plata, pero muchos otros siguen vivos, como mis ganas de superarme en los siguientes entrenamientos nacionales y en la siguiente EGMO. Como dije, me dedicaré a disfrutarlos.

Es cierto que toda mi experiencia en la olimpiada fue y es increíble, y que puedo escribir libros enteros sobre la felicidad y el crecimiento que me produjo, pero en este proceso también hubo muchos momentos difíciles, donde un solo punto hizo una gran diferencia. Competimos contra nuestra amistad más fuerte por un solo lugar, lloramos desconsoladamente por no obtener lo que buscábamos, nos desmotivamos por meses y, aunque en el fondo queríamos entrenar, nos preguntábamos que estaba mal con nosotras y cómo podríamos recuperar esa motivación. Nos frustramos por quedarnos tan cerca o incluso lejos de nuestra meta, pero estoy convencida de que todo esto solo nos hizo crecer y aprender inmensamente. Y qué mejor lugar para hacerlo que uno donde estás rodeado de empatía, amor, solidaridad y sabiduría.

Aquí aprendí que a veces debemos dejar de lado nuestras preocupaciones y tristezas para darle la mano a un amigo, o para disfrutar plenamente el pequeño momento que tenemos juntos; que podemos tener un muy mal primer día, pero necesitamos recordar que en el segundo día todo es posible; a mantener la disciplina incluso en momentos difíciles, pero saber tomar descansos cuando es necesario; que podemos hacer relaciones tan fuertes que, al vernos mal, nos rodearán de cariño y motivación. Y especialmente que somos capaces de todo, incluso de lo imposible.

Diariamente me considero afortunada de ser parte de este gran proyecto, y de pertenecer a un lugar donde siento que encajo perfectamente, el cual me ha visto crecer y desarrollarme en muchos aspectos, y al que siempre le guardaré una gran gratitud por todo lo que me enseñó y por todas las personas que me permitió conocer. Por lo que solo me queda decir: GRACIAS. A Lupita, por convertirse en una segunda madre para mi; a Crisanto, por su apoyo diario y por no dejarnos solos todo este tiempo; a Emilio Domínguez, por ayudarme en mis primeros pasos; a Emilio Ramos, Rebeca, Marce, Luis A., Eduardo, Víctor y Sofi por ser los mejores entrenadores y codelegados (e incluso compañeros) sinaloenses; a Fer, Karen, Axel, Iván, Elías, Henrry, Rolando, Camila, Ana,... gracias por haber estado ahí siempre, siendo mi equipo en cada competencia; a Lalo García, Nacho, Lalo Cázares, Myriam, Kenya, Liceaga, Ana Pau, Omar, Vicky mamá, porque a pesar de no ser sinaloenses, siempre me demostraron su fe, motivación y apoyo incondicional; a Ransom, Isa y Roge, por dejarme tanto, no solo de matemáticas; a Héctor, Vicky, Sofi, Takumi, Emmanuel, Diego V., Andrés, Mateo, Andrea, Javi, Iker, Cams, Eunice, Said, Pollo, Ale, Alonso, entre muchos más, por permitirme conocerlos y ser parte de sus vidas. Y, sobre todo, gracias a mi familia por ayudarme a hacer todos mis sueños posibles. Gracias a cada persona que hizo la Olimpiada de Matemáticas una realidad, no sólo para mí, sino para los cientos y miles de mexicanos a los que les ha cambiado la vida. Siempre estaré gigantescamente agradecida.

Diego Octavio Talavera Maya (BCS)

Ex-olímpico 2010 y 2012

Hola, mi nombre es Diego Talavera y soy ex olímpico de los años 2010 y 2012. Soy originario de Ciudad Constitución en Baja California **Sur** y aquí les comparto un poco de mi experiencia en la OMM, y qué efecto ha tenido en mi vida.

Realicé mi licenciatura en ingeniería Aeroespacial en la Universidad Autónoma de Baja California [norte] y una maestría en Ciencia y Tecnología Espacial en la Universidad Tecnológica de Luleå (LTU) en Suecia. Actualmente soy ingeniero de diseño de propulsión para PLD Space, en España y me dedico a hacer cohetes orbitales!

Participar en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en 2010 y 2012 fue una de las experiencias más desafiantes y gratificantes de mi vida. La preparación para la competencia me enseñó mucho más que matemáticas: desarrolló en mí una disciplina y perseverancia que han sido fundamentales en mi formación personal, académica y profesional.

Los desafíos de la OMM me enseñaron a no buscar soluciones rápidas, sino a analizar las situaciones desde varias perspectivas y a encontrar caminos innovadores, o poco obvios. Este enfoque me ha ayudado en muchas áreas de mi vida, desde la universidad hasta mi carrera profesional, donde he descubierto que la habilidad para resolver problemas complejos y abordar situaciones con paciencia y creatividad es invaluable.

A pesar de no haber obtenido ninguna medalla, esta experiencia ha sido una parte muy importante de mi vida, tanto durante los años donde pude participar, como después, al concluir la escuela preparatoria. Considero que mucho de lo que he logrado se debe, al menos en parte, al haber sido parte de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. La OMM me enseñó que el verdadero logro no siempre está en el podio, sino en el crecimiento que obtenemos al atrevernos a salir de nuestra zona de confort, y esas lecciones siguen siendo parte fundamental de mi vida hasta hoy.

Además, la OMM me regaló un sentido de comunidad. A lo largo de esos años, conocí a otras personas apasionadas por las matemáticas, y muchas de ellas se convirtieron algunos de mis mejores amigos. Esta red de amigos y mentores ha sido un apoyo invaluable y una fuente constante de inspiración. Incluso, el amor por las matemáticas cultivado por la OMM, también me permitió hacer amigos más allá de México, sobre todo durante mi maestría, la cual realicé en el norte de Suecia.

Parte de la disciplina desarrollada para la OMM se vio reflejada casi inmediatamente en mi día a día, ya que, durante ese tiempo, también practicaba natación de manera competitiva, y aunque ahora lo haga de manera recreativa, es otra cosa que sigo haciendo hasta el día de hoy. La consistencia y dedicación que uno requiere para la OMM, son otras de las habilidades que son fácilmente transferibles a otras áreas de tu vida.

Después de que mi tiempo como participante en la OMM terminó, tuve la oportunidad de entrenar a un amigo mío para participar en esta competencia. En la cual, él también llegó a participar en la competencia nacional. El haber podido compartir mi experiencia y conocimiento con alguien mas de esa manera fue muy gratificante y afirmó la importancia que la Olimpiada ha tenido en mi vida.

Mirando hacia atrás, puedo decir que la OMM fue una experiencia transformadora. No solo me hizo crecer en términos de conocimiento académico, sino que me dio herramientas y una mentalidad que aplico a diario en mi vida. La disciplina, la creatividad, el pensamiento crítico y la resiliencia que aprendí en esos años son aspectos que valoro profundamente y que seguirán compañándome siempre.

Soluciones al artículo "Apuntes sobre la ecuación cuadrática"

(Año 2024, No. 2)

En el número anterior en el artículo "Apuntes sobre la ecuación cuadrática" se propusieron algunos problemas para practicar la teoría, ahora presentamos las soluciones a esos problemas propuestos. Para leer el artículo completo, diríjase a la revista Tzaloa Año 2024 No.2

Problema 14. *(Balcanes)* Prueba que el número

$$N = \underbrace{11\dots11}_{1997}\underbrace{22\dots22}_{1998}5$$

es un cuadrado perfecto.

Solución 14. Notemos que

$$\underbrace{11\dots11}_{1997} = \frac{\overbrace{99\dots99}^{1997}}{9} = \frac{10^{1997}-1}{9}$$

y por lo tanto.

$$\underbrace{22\dots22}_{1998} = 2\cdot\underbrace{11\dots11}_{1998} = \frac{2(10^{1998}-1)}{9}$$

Luego

$$\begin{aligned}
N &= \underbrace{11\ldots 11}_{1997}\cdot 10^{1999}+\underbrace{22\ldots 22}_{1998}\cdot 10+5\\
&= \frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999}+\frac{2(10^{1998}-1)}{9}\cdot 10+5\\
&= \frac{(10^{1997}-1)\cdot 10^{1999}+2\cdot(10^{1998}-1)\cdot 10+45}{9}\\
&= \frac{10^{3996}-10^{9999}+2\cdot 10^{1999}-20+45}{9}\\
&= \frac{10^{3996}+10^{9999}+25}{9}\\
&= \frac{10^{3996}+2\cdot 10^{9998}\cdot 5+5^2}{9}\\
&= \frac{(10^{9998}+5)^2}{3^2}\\
&= \left(\frac{10^{9998}+5}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, observemos que

$$10^{9998}+5=1\underbrace{00\ldots 00}_{9997}5=\underbrace{99\ldots 99}_{9997}0+15$$

y así

$$\frac{10^{9998}+5}{3}=\frac{\overbrace{99\ldots 99}^{9997}0+15}{3}=\frac{\overbrace{99\ldots 99}^{9997}0}{3}+\frac{15}{3}=\underbrace{33\ldots 33}_{9997}0+5=\underbrace{33\ldots 33}_{9997}5.$$

Concluimos que

$$N=(\underbrace{33\ldots 33}_{9997}5)^2.$$

Problema 15. *(AMC)* ¿Cuántos pares ordenados de enteros (m,n) satisfacen la siguiente ecuación?

$$m^2+mn+n^2=m^2n^2.$$

Solución 15. Claramente, $m=0=n$ es una de las soluciones. Observemos que el lado izquierdo es un trinomio muy similar a un trinomio cuadrado perfecto, así que aplicamos la técnica de completar el cuadrado, sumando mn a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} m^2+mn+n^2+mn &= m^2n^2+mn \\ m^2+2mn+n^2 &= m^2n^2+mn \\ (m+n)^2 &= mn(mn+1). \end{aligned}$$

Observemos que mn y $mn+1$ son enteros consecutivos. Por lo tanto, son primos relativos. Además, dado que su producto es un cuadrado perfecto, cada uno de ellos lo debe ser también. Luego, existen enteros positivos x, y tales que

$$x^2 = mn \quad \text{y} \quad y^2 = mn+1.$$

Así

$$y^2 - x^2 = 1 \quad \to \quad (y-x)(y+x) = 1$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y-x &= 1, \\ y+x &= 1, \end{aligned}$$

cuya solución es $x=0$, $y=1$. En consecuencia, $mn=0$ y por lo tanto $m^2+n^2=0$, de donde concluimos que $m=n=0$ es la única solución.

Problema 16. *(AMC)* Supongamos que $a \neq 0 \neq b$ son números reales que satisfacen la ecuación

$$x^2+ax+b=0.$$

¿Qué posibles valores puede tomar el par (a,b)?

Solución 16. Aplicamos las fórmulas de Vietè directamente para obtener

$$a+b=-a \quad \text{y} \quad ab=b.$$

Luego, como $b \neq 0$ entonces

$$ab=b \quad \to \quad a=1$$

y

$$a+b=-a \quad \to \quad b=-2a \quad \to \quad b=-2.$$

Así, la única pareja que cumple las condiciones es $(a,b)=(1,-2)$.

Problema 17. *(Singapur)* Halla el valor de

$$\sqrt{45-\sqrt{2000}}+\sqrt{45+\sqrt{2000}}.$$

Solución 17. Consideremos

$$a=\sqrt{45-\sqrt{2000}} \quad \text{y} \quad b=\sqrt{45+\sqrt{2000}}.$$

Entonces

$$a^2+b^2=(45-\sqrt{2000})+(45+\sqrt{2000})=90$$

y

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{45-\sqrt{2000}}\sqrt{45+\sqrt{2000}} \\ &= \sqrt{(45-\sqrt{2000})(45+\sqrt{2000})} \\ &= \sqrt{45^2-\sqrt{2000}^2} \\ &= \sqrt{2025-2000} \\ &= 5. \end{aligned}$$

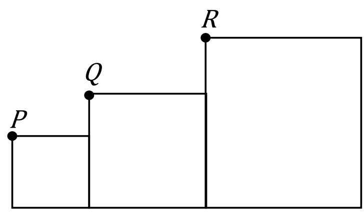
Por lo tanto,

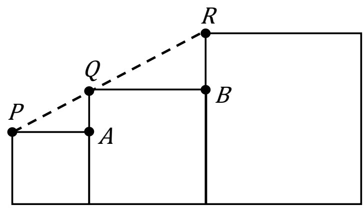
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=90+2\cdot 5=100.$$

Finalmente,

$$a+b=10.$$

Problema 18. *(Reino Unido)* Los vértices P, Q, R de los cuadrados de la figura están alineados. Un lado del cuadrado mayor mide 50cm. Si un lado del cuadrado mediano mide 8cm más que un lado del cuadrado menor, ¿qué posibles medidas tiene el lado del cuadrado menor?





Solución 18. Supongamos que P, Q, R están alineados, como lo indica la figura Por el teorema de Tales, podemos ver que los triángulos $\triangle PQA$ y el $\triangle QRB$ son similares, lo que significa que la proporción entre sus lados es la misma. Más específicamente,

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{QA}}.$$

Además, por las hipótesis del problema, conlcuimos que

$$\overline{PA} = x, \quad \overline{QB} = x + 8, \quad \overline{QA} = 8, \quad \overline{RB} = 50 - (x + 8) = 42 - x.$$

Entonces, de acuerdo a la proporción, obtenemos

$$\frac{x+8}{x} = \frac{42-x}{8}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{8}{x+8} &= \frac{42-x}{x} \\ 8x + 64 &= 42x - x^2 \\ x^2 - 42x + 8x + 64 &= 0 \\ x^2 - 34x + 64 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, resolvemos esta ecuación aplicando la ecuación general

$$x = \frac{-(-34) \pm \sqrt{(-34)^2 - 4(64)}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{900}}{2},$$

Luego

$$x_1 = \frac{34-30}{2} = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{34+30}{2} = 32.$$

Así, las posibles soluciones son $x = 2$ y $x = 32$.

Problema 19. *(AMC)* Sean d y e las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

¿Cuál es el valor de $(d-1)(e-1)$?

Solución 19. Aplicando las fórmulas de Vietè obtenemos

$$d + e = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad de = -\frac{5}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} (d-1)(e-1) &= de - d - e + 1 \\ &= de - (d+e) + 1 \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Problema 20. *(Canadá)* Encuentra todos los números positivos x tales que el número, su parte entera y su parte fraccionaria están en progresión geométrica.

Solución 20. Consideremos

$$x = b + c,$$

donde $b = \lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x y $c = x - \lfloor x \rfloor$ su parte decimal. Entonces, como estos números forman una progresión geométrica, tenemos

$$b = xr \quad \text{y} \quad c = xr^2$$

para algún número $0 < r < 1$. Luego

$$\begin{aligned} b + c &= x, \\ xr + xr^2 &= x, \\ xr^2 + xr - x &= 0, \\ x(r^2 + r - 1) &= 0, \\ r^2 + r - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones se obtienen por medio de la fórmula general

$$r = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así, como $r > 0$ consideramos solamente el valor positivo

$$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por otro lado, como $c = br$ es la parte fraccionaria, se cumple

$$0 \leq c < 1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq b < \frac{1}{r}.$$

Dado que

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$$

y b es un número entero positivo, de la desigualdad

$$b < \frac{1}{r} < 2$$

concluimos $b = 1$. Entonces,

$$x = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Problema 21. *(Reino Unido)* ¿Cuántas parejas de enteros (m, n) satisfacen la siguiente ecuación?

$$\sqrt{m - \sqrt{m+23}} = 2\sqrt{2} - n.$$

Solución 21. Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y reordenamos para obtener

$$m - \sqrt{m+23} = 8 - 4\sqrt{2}n + n^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{m+23} = (m - n^2 - 8) + 4\sqrt{2}n.$$

Elevamos al cuadrado nuevamente

$$m + 23 = (m - n^2 - 8)^2 + 8\sqrt{2}n(m - n^2 - 8) + 32n^2.$$

Como m y n son enteros, y $\sqrt{2}$ no es número racional, necesariamente se anula el término $8\sqrt{2}n(m - n^2 - 8)$. En consecuencia tenemos dos casos: $n = 0$, o bien, $m - n^2 - 8 = 0$. En el primer caso, la ecuación se reduce a

$$m + 23 = (m-8)^2 \quad \rightarrow \quad m + 23 = m^2 - 16m + 64 \quad \rightarrow \quad m^2 - 17m + 41 = 0,$$

cuyas soluciones

$$m = \frac{17 \pm \sqrt{125}}{2}$$

no son enteras, por lo que el caso $n = 0$ se desecha. Por otro lado, si $m - n^2 - 8 = 0$, entonces la ecuación toma la forma

$$(8 + n^2) + 23 = 32n^2 \quad \to \quad 31n^2 = 31 \quad \to \quad n = \pm 1.$$

Luego, $m = n^2 + 8 = 9$. Sustituyendo notamos $m = 9$, $n = -1$ en la ecuación original obtenemos

$$9 - 4\sqrt{2} \neq 9 + 4\sqrt{2},$$

por lo que no es solución. Así la única solución es $(9, 1)$.

Problema 22. *(Nórdicos)* Encuentra todos los valores de x para los cuales todos los números de la forma

$$x^n + \frac{1}{x^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

son enteros positivos.

Solución 22. Consideremos

$$a_n = x^n + \frac{1}{x^n},$$

y observemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_1 &= \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} \\ &= a_{n+2} + a_n. \end{aligned}$$

Como $a_0 = 2$, entonces a partir de la relación

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_1 - a_n$$

podemos concluir que a_2 es entero si a_1 lo es. De manera análoga, a_3 será entero, ya que a_2 y a_1 lo son. Este proceso se puede repetir indefinidamente (formalmente, estamos hablando de una demostración por inducción) para demostrar que a_n es entero para todo entero positivo n.

En conclusión, la condición necesaria y suficiente para que todos los valores a_n sean enteros es que a_1 sea entero. Sea pues $a_1 = n$, entonces

$$x + \frac{1}{x} = n \quad \to \quad x^2 - nx + 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}.$$

Luego, los valores de x deseados son todos los de la forma

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}, \quad n \neq -1, 0, 1.$$

Problema 23. *(Canadá)* Encuentra todas las soluciones reales de la ecuación

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

Solución 23. En este problema buscamos un cambio de variable de modo que la ecuación resultane sea simétrica. Sea pues

$$y = \frac{x}{x+1},$$

de modo que al sustituir directamente en la ecuación obtenemos

$$x^2 + y^2 = 3$$

Por otro lado, reordenamos la relación que define el cambio de variable

$$y(x+1) = x \quad \rightarrow \quad xy + y = x \quad \rightarrow \quad xy = x - y$$

para conseguir el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3, \\ xy &= x - y. \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la segunda ecuación,

$$(xy)^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 3 - 2xy.$$

Luego tenemos la ecuación cuadrática en la variable $z = xy$:

$$z^2 + 2z - 3 = 0.$$

Aplicamos la fórmula general y obtenemos

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2},$$

así que

$$z_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Para el caso $z = 1$ tenemos $y = x - xy = x - 1$ y por lo tanto

$$x^2 + (x-1)^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + x^2 - 2x + 1 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Luego

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por otro lado, con $z = -3$ tenemos $y = x + 3$ y

$$x^2 + (x+3)^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + x^2 + 6x + 9 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Notemos que el discriminante cumple

$$\Delta = 3^2 - 4(3)(3) = -3$$

y en consecuencia no hay soluciones reales en este caso.

Problema 24. *(China)* Halla todos los enteros positivos k que cumplan la siguiente propiedad: si a, b, c son tres números positivos tales que

$$k(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2),$$

entonces existe un triángulo cuyos lados tienen medidas a, b, c.

Solución 24. Como primer paso estimamos el valor de k. Veamos primero que

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Luego, sumamos las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab, \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc, \\ c^2 + a^2 &\geq 2ca, \end{aligned}$$

obtenemos

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Así, multiplicando por 5 obtenemos

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 5(ab + bc + ca).$$

Puesto que se cumple la desigualdad inversa, concluimos que $k \geq 6$. Por otro lado, dado que no existe un triángulo cuyos lados midan $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, debe cumplirse la desigualdad

$$k(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) \leq 5(1^2 + 1^2 + 2^2),$$

y por lo tanto

$$k \leq \frac{5(6)}{5} = 6.$$

En consecuencia, $k = 6$ es el único posible valor. Verifiquemos que en efecto se cumplen las condiciones. Por la simetría del problema podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$. Así, de la desigualdad

$$6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2) \quad \to \quad 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 6ab - 6bc - 6ca < 0,$$

obtenemos la siguiente expresión cuadrática en la variable c:

$$5c^2 - (6a + 6b)c + (5b^2 + 5a^2 - 6ab) < 0.$$

Luego

$$c_2 < c < c_1$$

donde c_1, c_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente. Es decir,

$$c_1 = \frac{6(a + b) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 5}, \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{6(a + b) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 5}.$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta &= (6(a + b))^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5a^2 + 5b^2 - 6ab) \\
&= 36(a^2 + 12ab + b^2) - 20(5a^2 + 5b^2 - 6ab) \\
&= 36a^2 + 72ab + 36b^2 - 100a^2 - 100b^2 + 120ab \\
&= -64a^2 + 192ab - 64b^2 \\
&= 64(-a^2 + 3ab - b^2).
\end{aligned}$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
-a^2 + 3ab - b^2 &= ab - a^2 + 2ab - b^2 \\
&= ab - (a^2 - 2ab + b^2) \\
&= ab - (a - b)^2 \\
&< ab,
\end{aligned}$$

luego
$$\Delta \leq 64ab.$$

Finalmente, de la desigualdad $0 \leq (a-b)^2$ podemos deducir que

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \quad \rightarrow \quad 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \quad \rightarrow \quad ab \leq \frac{(a+b)^2}{4},$$

y en consecuencia
$$\Delta \leq 64 \cdot \frac{(a+b)^2}{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\Delta} \leq 4(a+b).$$

Por lo tanto,

$$c_1 = \frac{6(a+b) + \sqrt{\Delta}}{10} \leq \frac{6(a+b) + 4(a+b)}{10} = \frac{10(a+b)}{10} = a + b,$$

de donde concluimos
$$c < a + b.$$

Problema 25. *(Balcanes)* Halla todas las soluciones enteras no negativas (x, y) de la ecuación
$$9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y.$$

Solución 25. Notemos que $9^x = (3^x)^2$. Aplicamos ahora la técnica de completar el cuadrado. Primero multiplicamos ambos lados de la igualdad por 4 y después le sumamos 1 para obtener

$$\begin{aligned} 4(3^x)^2 + 4 \cdot 3^x &= 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y, \\ 4(3^x)^2 + 4 \cdot 3^x + 1 &= 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1, \\ (2 \cdot 3^x + 1)^2 &= 4y^4 + 8y^3 + 4y^2 + 8y + 1. \end{aligned}$$

Comparamos el lado derecho D de la igualdad con dos cuadrados consecutivos. Primero notemos que

$$(2y^2 + 2y)^2 = (2y^2)^2 + 2(2y^2)(2y) + (2y)^2 = 4y^4 + 8y^3 + 4y^2.$$

Así
$$D - (2y^2 + 2y)^2 = 8y + 1 > 0,$$

y en consecuencia $D > (2y^2 + 2y)^2$. Ahora, el siguiente cuadrado es

$$\begin{aligned}(2y^2 + 2y + 1)^2 &= (2y^2 + 2y)^2 + 2(2y^2 + 2y) + 1\\ &= (4y^4 + 8y^3 + 4y^2) + (4y^2 + 4y) + 1\\ &= 4y^4 + 8y^3 + 8y^2 + 4y + 1.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$(2y^2 + 2y + 1)^2 - D = 4y^2 - 4y = 4y(y - 1) \geq 0.$$

Como y es un entero no negativo, la igualdad $4y(y-1) = 0$ solo se cumple cuando $y = 0$ o $y = 1$. Si $y = 0$, entonces la ecuación original es

$$(3^x)^2 - 3^x = 0 \quad \rightarrow \quad 3^x(3^x - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3^x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0.$$

Por el contrario, si $y = 1$,

$$(3^x)^2 - 3^x = 6 \quad \rightarrow \quad 3^x(3^x - 1) = 3 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad 3^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

Finalmente, si $y \geq 2$ entonces

$$(2y^2 + 2y)^2 < D < (2y^2 + 2y + 1)^2,$$

y por lo tanto no existen soluciones, ya que D es un cuadrado que se encuentra entre dos cuadrados perfectos consecutivos. Hemos probado que las únicas soluciones son $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (1, 1)$.

Problema 26. *(Singapur)* Encuentra el mayor número real a tal que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}a^2 - bc - 8a + 7 &= 0,\\ b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 &= 0.\end{aligned}$$

tiene solución real.

Solución 26. De la primera ecuación tenemos

$$bc = a^2 - 8a + 7.$$

Por otro lado, al igualar las dos ecuaciones concluimos

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 &= a^2 - bc - 8a + 7, \\
b^2 + c^2 + bc + bc &= a^2 - 8a + 7 + 6a - 6, \\
b^2 + 2bc + c^2 &= a^2 + 2a + 1, \\
(b+c)^2 &= (a+1)^2, \\
b + c &= \pm(a+1).
\end{aligned}$$

Esto significa que b y c son las soluciones de las ecuaciones

$$x^2 \mp (a+1)x + (a^2 - 8a + 7) = 0.$$

Como estamos suponiendo que b y c son reales, necesariamente el discriminante es no negativo:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Delta \\
&= (\mp(a-1))^2 - 4(a^2 - 8a + 7) \\
&= a^2 - 2a + 1 - 4a^2 + 32a - 28 \\
&= -3a^2 + 30a - 27 \\
&= -3(a^2 - 10a + 9) \\
&= -3(a-1)(a-9).
\end{aligned}$$

Esta desigualdad es válida para $1 \leq a \leq 9$. Si tomamos $a = 9$ la ecuación cuadrática resultante

$$x^2 - 8x + 16 = 0,$$

tiene por solución

$$b = c = 4.$$

En consecuencia, $a = 9$ es el valor buscado

Problema 27. *(Balcanes)* Halla todos los enteros positivos distintos x, y, z tales que

$$4^x + 4^y + 4^z$$

es un cuadrado perfecto.

Solución 27. Dada la simetría de la expresión, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \leq y \leq z$. Entonces

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^x(1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}),$$

y por lo tanto

$$1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$$

es un cuadrado perfecto, que necesariamente es impar. Es decir,

$$1 + 4^{y-x} + 4^{z-x} = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1.$$

Simplificando y factorizando

$$\begin{aligned} 4^{y-x-1} + 4^{z-x-1} &= m^2 + m \\ 4^{y-x-1}(1 + 4^{z-y}) &= m(m+1). \end{aligned}$$

Como $4^{y-x-1} = 2^{2(y-x-1)}$, $1 + 4^{z-y}$ es impar y los enteros m, $(m+1)$ tienen paridad distinta, tenemos

$$1 + 4^{z-y} = m + 1 \quad \text{y} \quad 4^{y-x-1} = m,$$

o bien

$$1 + 4^{z-y} = m \quad \text{y} \quad 4^{y-x-1} = m + 1.$$

En el primer caso tenemos

$$4^{z-y} = 4^{y-x-1},$$

y por lo tanto,

$$z - y = y - x - 1 \;\rightarrow\; z = 2y - x - 1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} 4^x + 4^y + 4^z &= 4^x + 4^y + 4^{2y-x-1} \\ &= (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{2y-x-1} + (2^{2y-x-1})^2 \\ &= (2^x + 2^{2y-x-1})^2. \end{aligned}$$

En el segundo caso, concluimos que

$$4^{y-x-1} = 4^{z-y} + 2,$$

y por lo tanto no hay solución, ya que el lado izquierdo es divisible por 4 en tanto que el lado derecho no lo es. Resumiendo, todas las tercias de números enteros positivos de la forma

$$(x, y, 2y - x - 1)$$

satisfacen la condición.

Problema 28. *(Nórdicos)* Encuentra todas las funciones $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tales que para todo x se cumple

$$f(x(1 + |x|)) \leq x \leq f(x)(1 + |f(x)|).$$

Solución 28. Dividiremos la solución en dos casos

Caso 1: [x≥ 0]

Notemos que $1 + |f(x)| \geq 1$, tenemos que

$$fx) \geq \frac{x}{1 + |f(x)|} \geq x \geq 0$$

Denotemos $y = f(x)$ y consideremos la desigualdad

$$x \leq y(1 + |y|) \quad \to \quad 0 \leq y|y| + y - x.$$

Como $y \geq 0$ entonces tenemos la desigualdad

$$y^2 + y - x \geq 0.$$

La ecuación cuadrática correspondiente tiene por soluciones

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}, \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Notemos que si $x > 0$ entonces $y_2 < 0$, por lo que esta solución se desecha. En consecuencia, la desigualdad se cumple para $y \geq 0$ cuando $y \geq y_1 \geq 0$.

Es decir $f(x) \geq \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$

Por otra parte consideramos $t = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} = y_1 \geq 0$. Tenemos que

$$t(1 + |t|) = x$$

Usando que $f(x(1 + |x|)) \leq x$ para todo número real x, en particular tenemos que:

$$f(x) = f(t(1 + |t|)) \leq t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

Esto demuestra que si $x \geq 0$ entonces $f(x) = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$

Caso 2: $[x < 0]$ Consideramos ahora la ecuación cuadrática $t^2 - t - x = 0$, esta tiene por soluciones $t_1 = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$ y $t_2 = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$, como $x < 0$, tenemos que $t_2 < 0$.

Tenemos que:

$$0 > t_2 \geq f(t_2(1 + |t_2|)) = f(t_2 - t_2^2) = f(x)$$

Entonces $f(x) \leq t_2 = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$. Por otra parte la desigualdad

$$x \leq f(x)(1 + |f(x)|)$$

Tomando $t = f(x) < 0$, se reescribe como

$$t^2 - t - x \leq 0$$

La cual se satisface solamente cuando $t > t_2$. Por lo tanto concluimos que

$$f(x) \geq \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

de ahí que en este caso tenemos que $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$.

Concluimos que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} & x \geq 0, \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} & x < 0. \end{cases}$$

No es difícil ver que esta función cumple las condiciones requeridas y por lo tanto es la única solución.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.

Definición 2 (Congruencias)**.** Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.

2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.

3. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.

4. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.

Teorema 2 (Pequeño Teorema de Fermat)**.** Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 3 (Inducción)**.** El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:

1. Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.

2. Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.

3. Paso inductivo: Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.

Teorema 5 (Combinaciones)**.** Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio de Newton)**.** Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Teorema 9 (Pitágoras)**.** En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Teorema 10 (Criterio de congruencia LLL)**.** Si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.

Teorema 11 (Criterio de congruencia ALA). Si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.

Definición 4 (Semejanza de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema 12 (Criterio de semejanza AA). Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.

Teorema 13 (Tales). Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 14 (Teorema de la Bisectriz). Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 15 (Ceva). Dado ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.

Teorema 16 (Menelao). Dado un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia).

1. Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común sobre la circunferencia.

2. Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia en el punto de tangencia.

3. Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito). La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 18 (Medida del ángulo seminscrito)**.** La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersecan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de cualquiera de sus pares de ángulos opuestos es igual a 180°, esto es,

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega
(Presidente)

César Guadarrama Uribe
Claudia Marcela Aguilar Hernández
David Guadalupe Torres Flores
Enrique Treviño López
Héctor Raymundo Flores Cantú
Hugo Villanueva Méndez
Ignacio Barradas Bribiesca
José Eduardo Cázares Tapia
José Omar Guzmán Vega
Kenya Verónica Espinosa Hurtado
Kevin William Beuchot Castellanos
Luis Eduardo García Hernández
Luis Mauricio Montes de Oca Mena
María Eugenia Guzmán Flores
María Luisa Pérez Seguí
Mónica Mateos Vega
Myriam Hernández Ketchul
Rosa Victoria Rodríguez Olivé

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864