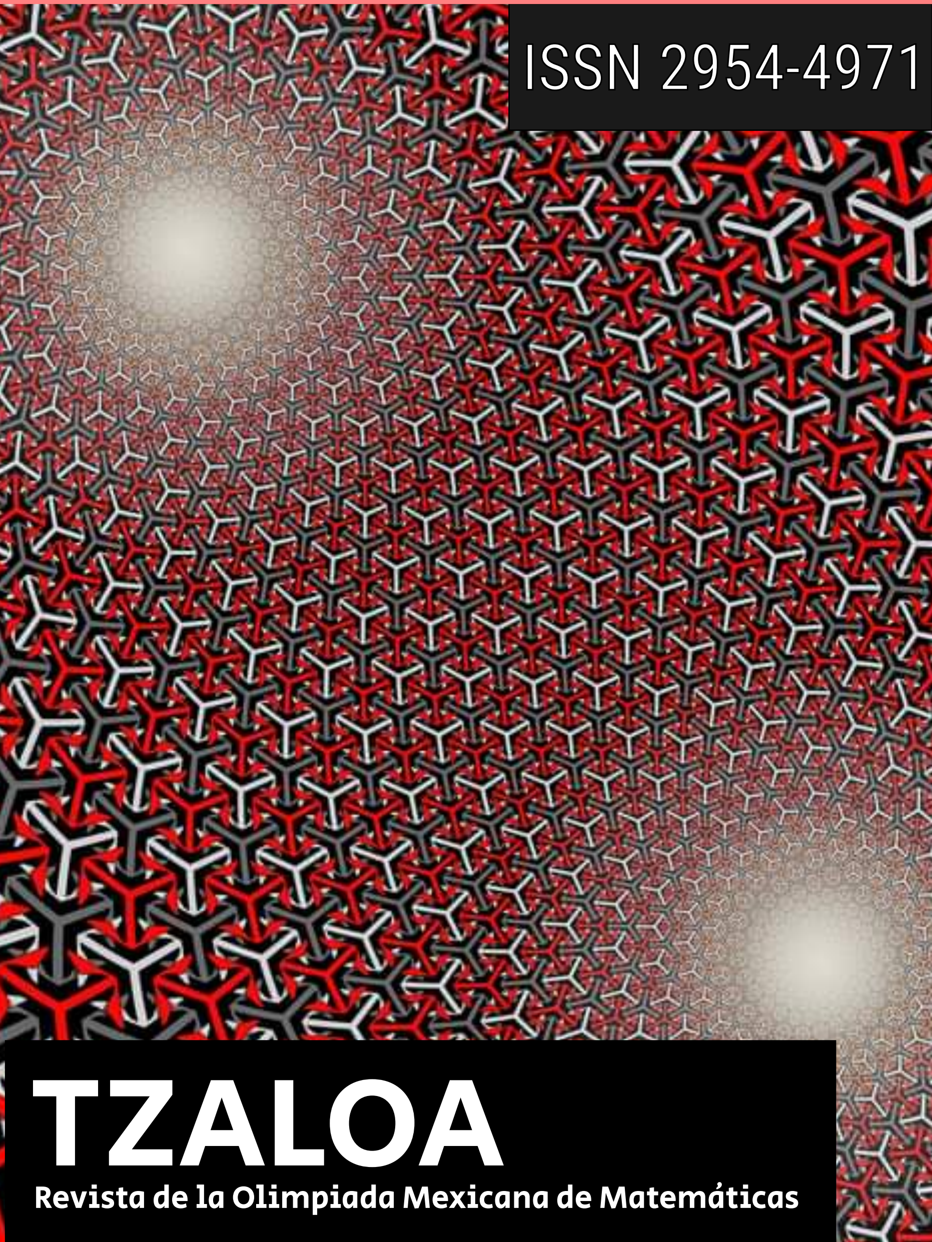
ISSN 2954-4971



TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

16 • 02

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 16, No. 2, Octubre de 2024) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel.: 55-5849-6709
Email: `smm@smm.org.mx`
Sitio web: `https://www.smm.org.mx`
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2024, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
https://www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Octubre de 2024

Índice general

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2024, Número 2

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribui-

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

do a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido en el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos estatales.
- Concurso nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos a partir del 1.º de agosto de 2005. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2024-2025 y, para el 1.º de julio de 2025, no haber iniciado estudios universitarios. Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 4 al 9 de noviembre de 2024 en Oaxtepec, Morelos. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2024 y hasta la fecha de la celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la 37.ª Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 66.ª Olimpiada Internacional de Matemáticas (a celebrarse en Australia en julio de 2025) y a la 40.ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (la cual se llevará a cabo en septiembre de 2025).

De entre los concursantes nacidos en 2009 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la 17.ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (a celebrarse en junio de 2025).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la 13.ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) la cual se llevará cabo en Kosovo en abril de 2025.

Apuntes sobre la ecuación cuadrática

Didier A. Solís Gamboa
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

Isabel Zhong Zhang
Madison International School, Campus Mérida

En este artículo analizaremos algunos aspectos elementales relacionados con la ecuación cuadrática y su aplicación en la resolución de problemas. Se incluye la deducción de la fórmula general, así como diversos ejemplos tomados de concursos a nivel junior (secundaria) de distintos países. Esperamos que estas notas puedan ser de utilidad a los competidores más jóvenes que inician su camino en la Olimpiada, en especial aquellos que se preparan para competir en la OMMEB.

Un poco de historia

Uno de los problemas fundamentales que ha motivado el desarrollo de las matemáticas sin duda ha sido el de poder hallar soluciones a diversos tipos de ecuaciones. En el caso de la ecuación cuadrática, los primeros registros que apuntan a procedimientos para encontrar su solución se remontan a Mesopotamia. En los grandes tratados como *Los Elementos* de Euclides o *Los Siete Libros de las Artes Matemáticas* de Liu Hui tenemos referencias a este problema [7]. Por ejemplo, en la Proposición 30 del Libro VI de Los Elementos, se pide dividir un segmento de manera que sus razones exteriores e interiores coincidan, problema que lleva naturalmente a la razón aúrea (la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$). El método de completar cuadrados –en el que se basan las deducciones más sencillas de la fórmula cuadrática– aparece en obras hindúes. Los matemáticos italianos de la Alta Edad Media ya habían desarrollado fórmulas muy similares a las que usamos hoy en día. Para cuando René Descartes publicó *La Geometrie* (el opúsculo donde introduce la geometría analítica), la fórmula cuadrática podía encontrarse esencialemente en la forma con que la conocemos actualmente [6].

Ahora analizaremos un ejemplo de solución a una ecuación cuadrática proveniente de la antigua Babilonia. En la tablilla YBC 6967, datada entre 1900 y 1600 a.C. encontramos el siguiente problema [4]:

> *"La base de un rectángulo de área* 60 *excede en* 7 *su altura. Halla el valor de la base y la altura."*

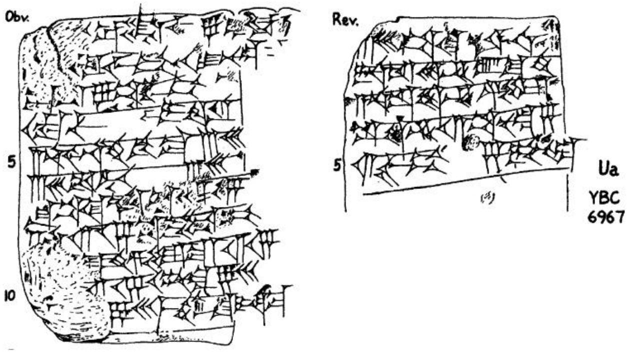


Figura 1: La tablilla YBC 6967

Si denotamos por x y y a la altura y la base del rectángulo, respectivamente, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} yx &= 60, \\ y &= x + 7. \end{aligned}$$

Al sustituir la segunda ecuación en la primera obtenemos

$$(x + 7)x = 60$$

y en consecuencia,

$$x^2 + 7x = 60. \tag{1}$$

La solución propuesta en la tablilla YBC 6967 ilustra un método de gran utilidad en la solución de problemas llamado *completar el cuadrado*. En la tablilla se indica la solución paso a paso, cuya transcripción precisa se puede encontrar en [1]:

1. Divide 7 a la mitad y obtienes $7/2$.

2. Eleva $7/2$ al cuadrado y obtienes $49/4$.

3. Al área súmale $49/4$ y obtienes $289/4$.

4. ¿Cuál es el lado de un cuadrado de área $289/4$? El lado es $17/2$.

5. Al lado réstale $7/2$ para obtener la altura $x = 5$.

6. Al lado súmale $7/2$ para obtener la base $y = 12$.

Notemos que el dato fundamental en la solución corresponde a la medida del lado del cuadrado, $7/2$, de ahí el nombre del método. La Figura 2 lo ilustra geométricamente.

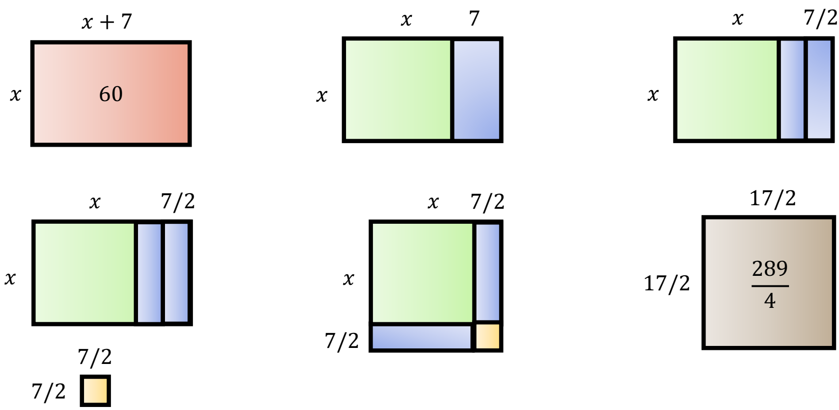


Figura 2: El método de completar el cuadrado.

En lenguaje algebraico moderno, haciendo $b = 7$ y $c = -60$, el procedimiento se traduce en los siguientes pasos:

$$\frac{b}{2} \to \frac{b^2}{4} \to \frac{b^2}{4} - c \to \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \to \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} - \frac{b}{2}.$$

Así tenemos

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Esta última expresión es precisamente la que corresponde a la ecuación cuadrática, que deduciremos en una sección posterior.

Completar el cuadrado

Por otro lado, desde un punto de vista algebraico, el método consiste en comparar un trinomio como el que aparece en la ecuación (1) y un *trinomio cuadrado perfecto*, es decir, el resultado de elevar un binomio al cuadrado. Recordemos que estos conceptos están relacionados mediante la identidad.

$$\begin{array}{ccc} (x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2. \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Binomio al} & & \text{Trinomio} \\ \text{cuadrado} & & \text{cuadrado} \\ & & \text{perfecto} \end{array} \tag{2}$$

Antes de entrar de lleno al análisis del método de completar cuadrados, pausamos un momento para enfatizar la importancia de la relación (2). Los siguientes ejemplos ilustran este hecho.

Problema 1. *(Singapur)* Halla el valor de

$$\sqrt{9999^2+19999}.$$

Solución 1. Notemos que

$$19999 = 19998 + 1 = 2 \cdot 9999 + 1.$$

Por lo tanto

$$9999^2 + 19999 = 9999^2 + 2 \cdot 9999 + 1 = (9999+1)^2 = 10000^2.$$

Así

$$\sqrt{9999^2+19999} = 10000.$$

Problema 2. *(Canadá)* Demuestra que el número 10201_b no es primo en ninguna base b.[2]

Solución 2. Notemos que

$$\begin{aligned} 10201_b &= 1 \cdot b^4 + 0 \cdot b^3 + 2 \cdot b^2 + 0 \cdot b + 1 \\ &= b^4 + 2b^2 + 1 \\ &= (b^2+1)^2. \end{aligned}$$

Así, 10201_b es un cuadrado perfecto para cualquier base, y por lo tanto, no puede ser un número primo.

[2] Recordemos que $(a_k \dots a_2 a_1 a_0)_b$, es la representación en base $b \geq 2$ del número

$$N = a_k b^k + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Problema 3. *(Singapur)* Si $x^2 - 13x + 1 = 0$, halla el dígito de las unidades de $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$.

Solución 3. Dividiendo entre x tenemos

$$x - 13 + \frac{1}{x} = 0,$$

y en consecuencia

$$x + \frac{1}{x} = 13.$$

Ahora, elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= 13^2 \\ x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= 169 \\ x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} &= 169 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= 167. \end{aligned}$$

Finalmente, elevamos al cuadrado una vez más

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 &= 167^2 \\ x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} &= 167^2 \\ x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} &= 167^2 \\ x^4 + \frac{1}{x^4} &= 167^2 - 2. \end{aligned}$$

Luego $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ termina en $9 - 2 = 7$.

Retomando nuestra discusión sobre el método de completar el cuadrado, procedemos a analizar lo descrito en la tablilla YBC 6967. Para ello, reordenamos la ecuación (1) del siguiente modo:

$$x^2 + 7x - 60 = 0. \tag{3}$$

Si comparamos la expresión del trinomio cuadrado perfecto (2) con el trinomio de la ecuación (3), notamos inmediatamente que los términos cuadráticos coinciden.

$$\color{red}{x^2} + 2xy + y^2 = \color{red}{x^2} + 7x - 60.$$

Ahora, al igualar los términos lineales

$$x^2 + \color{blue}{2xy} + y^2 = x^2 + \color{blue}{7x} - 60.$$

obtenemos

$$2xy = 7x,$$

y por lo tanto,

$$y = \frac{7}{2}.$$

En consecuencia, el binomio al cuadrado $(x+7/2)^2$ y el trinomio (3) tienen exactamente los mismos términos cuadráticos y lineales, y por lo tanto, solo difieren en sus términos constantes. De hecho, al sumar y restar 60 al lado derecho de la igualdad

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = x^2 + 7x + \frac{49}{4}$$

obtenemos

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = (x^2 + 7x - 60) + \left(\frac{49}{4} + 60\right) = \frac{289}{4},$$

ya que sabemos que $x^2 + 7x - 60 = 0$. Finalmente, tomando raíces cuadradas positivas de ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$x + \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2},$$

lo que lleva al resultado final

$$x = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5.$$

Problema 4. *(Canadá)* Demuestra que no existen enteros positivos a y b tales que

$$b^2 + b = 4a^2 + 4a.$$

Solución 4. Procedemos por contradicción. Supongamos que existen a, b enteros positivos que cumplen la relación. Sumamos 1 a cada lado de la igualdad para completar el cuadrado

$$b^2 + b + 1 = 4a^2 + 4a^2 + 1 = (2a + 1)^2.$$

Como b es un número positivo, tenemos las desigualdades

$$b^2 < b^2 + b + 1, \quad \text{y} \quad b^2 + b + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2.$$

Luego,

$$b^2 < (2a + 1)^2 < (b + 1)^2.$$

Es decir, $(2a + 1)^2$ es un cuadrado perfecto que se encuentra entre dos cuadrados perfectos consecutivos, lo cual claramente es un absurdo.

La ecuación cuadrática

La forma más común de la ecuación cuadrática es la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4}$$

donde a, b, c son números reales, con $a \neq 0$, que se conocen como los *coeficientes* de la ecuación. Así por ejemplo, los coeficientes de la ecuación (3) son

$$a = 1, \quad b = 7, \quad c = -60.$$

Como en toda ecuación, uno de sus aspectos más importantes consiste en resolverla, es decir, hallar todas sus posibles soluciones. En el caso de la ecuación cuadrática, es posible hallar sus soluciones siguiendo el método de completar el cuadrado que discutimos en la sección anterior.

Consideremos pues la ecuación (4), y dividamos ambos lados por a para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{5}$$

Luego restamos $\frac{c}{a}$ a ambos lados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Ahora completamos el binomio

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a}$$

para obtener un cuadrado perfecto. Es decir, sumamos el término

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

a ambos lados de la igualdad (5) y simplificamos

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}, \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

En este punto es importante notar que $\sqrt{4a^2} = |2a| = \pm 2a$, de modo que en la última linea de la deducción los signos pudieran estar invertidos. En todo caso, esto no supone ningún cambio, ya que se están considerando *ambos* signos en la solución.

Así, hemos obtenido la famosa *fórmula general* para resolver la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{6}$$

donde la expresión

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

recibe el nombre de *discriminante de la ecuación* (4).

Inmediatamente podemos observar que esta fórmula brinda dos posibles soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Sin embargo, un análisis un poco más profundo revela que en algunos casos al aplicar esta fórmula obtenemos solamente una solución. Estos casos especiales ocurren precisamente cuando el discriminante se anula, ya que así se cumple

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = x_2.$$

Notemos que en este caso el método de completar el cuadrado nos indica que el trinomio de la ecuación (5) es de entrada un trinomio cuadrado perfecto, y por lo tanto, no es necesario completarlo. En efecto, notemos que

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{4a} = c \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

y así

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Finalmente, cuando $\Delta < 0$, la fórmula general (6) nos indica que no existen soluciones *reales* a la ecuación cuadrática (4), ya que se está tomando la raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, si consideramos otra clase de números, donde llevar a cabo estas operaciones con raíces negativas es posible, entonces sí podemos encontrar dos soluciones en este caso. Dichos números reciben el nombre de *números complejos*, y su estudio, aunque muy importante, no se abordará aquí sino en un trabajo posterior.

Problema 5. *(AMC)* Existen exactamente dos valores reales de a para los cuales la ecuación

$$4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$$

tiene una única solución. ¿Cuál es la suma de estos valores de a?

Solución 5. Notemos que el discriminante de la ecuación cuadrática

$$4x^2 + (a+8)x + 9 = 0$$

satisface

$$\Delta = (a+8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = (a+8)^2 - 144.$$

En consecuencia, la ecuación tendrá exactamente una solución si

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad (a+8)^2 - 144 = 0 \quad \rightarrow \quad a + 8 = \pm\sqrt{144} = \pm 12.$$

Así los valores buscados son

$$a = -8 + 12 = 4 \quad \text{y} \quad a = -8 - 12 = -20,$$

y su suma es

$$S = 4 - 20 = -16.$$

Problema 6. *(Canadá)* Encuentra la menor base b para la cual el número 777_b representa una cuarta potencia.

Solución 6. De acuerdo a las condiciones del problema, tenemos que existen enteros positivos b y n tales que

$$\begin{aligned} n^4 &= 7b^2 + 7b + 7 \\ &= 7(b^2 + b + 1). \end{aligned}$$

Vemos que 7 divide a n^4, y como n es primo, concluimos que 7 divide a n. Como buscamos la solución más pequeña, probamos con el menor múltiplo de 7, es decir $n = 7$. Al sustituir este valor obtenemos

$$\begin{aligned} 7(b^2 + b + 1) &= 7^4, \\ b^2 + b + 1 &= 7^3, \\ b^2 + b + 1 - 7^3 &= 0. \end{aligned}$$

Procedemos pues a resolver la ecuación cuadrática

$$b^2 + b - 342 = 0.$$

Aplicando directamente la fórmula general, tenemos

$$\begin{aligned} b &= \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(-342)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1369}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 37}{2}. \end{aligned}$$

Luego, las soluciones son

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-1 + 37}{2} = \frac{36}{2} = 18, \\ b_2 &= \frac{-1 - 37}{2} = \frac{-38}{2} = -19. \end{aligned}$$

Se descarta la solución negativa, pues las bases son enteros positivos. Así, la base más pequeña es $b = 18$, de esta forma se tiene:

$$777_{18} = 7 \cdot 18^2 + 7 \cdot 18 + 7 = 2401 = 7^4.$$

En muchos problemas se buscan soluciones *enteras* de la ecuación cuadrática. Cuando todos los coeficientes son enteros, para que las soluciones también lo sean, es indispensable que el discriminante sea un cuadrado perfecto, de modo que al tomar la raíz cuadrada, el resultado sea un entero. Vale la pena aclarar que esta condición sobre el discriminante, si bien es necesaria, no es suficiente, ya que solo garantiza que el numerador que aparece en la fórmula general sea entero. Para tener soluciones enteras se requiere además que el denominador divida al numerador. Esta técnica ha sido explorada con mayor profundidad en [2].

Problema 7. *(China)* Sea p un primo impar. Encuentra todos los enteros positivos k tales que $\sqrt{k^2 - pk}$ sea un entero positivo.

Solución 7. Consideremos un entero positivo n tal que

$$n = \sqrt{k^2 - pk}.$$

Elevamos al cuadrado y reordenamos para obtener una ecuación cuadrática en k:

$$k^2 - pk - n^2 = 0.$$

Dado que k es entero, concluimos que el discriminante debe ser un cuadrado perfecto. Así

$$\Delta = p^2 + 4n^2 = m^2.$$

Por lo tanto,

$$p^2 = m^2 - 4n^2 = (m + 2n)(m - 2n).$$

Como n es positivo, tenemos que $m + 2n > m - 2n$. Ya que p es primo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} 1 &= m - 2n, \\ p^2 &= m + 2n. \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos

$$1 + p^2 = 2m \quad \rightarrow \quad m = \frac{1 + p^2}{2}.$$

Finalmente, usamos la fórmula general para hallar los valores de k:

$$k = \frac{-(-p) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{p \pm m}{2} = \frac{p \pm (1 + p^2)/2}{2} = \frac{2p \pm (1 + p^2)}{4}.$$

Así obtenemos las soluciones

$$k = \frac{p^2 + 2p + 1}{4} = \frac{(p + 1)^2}{4} \quad \text{y} \quad k = \frac{-p^2 + 2p - 1}{4} = -\frac{(p - 1)^2}{4}.$$

Como k es positivo se descarta la segunda opción.

Problema 8. *(USA)* Encuentra todas las parejas de números enteros distintos de cero (m, n) que satisfacen

$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m - n)^3$$

Solución 8. Expandimos ambos lados de la ecuación

$$m^3 + m^2n^2 + nm + n^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$$

y luego simplificamos

$$m^2n^2 + 3m^2n - 3mn^2 + mn + 2n^3 = 0.$$

El paso fundamental consiste en observar que los términos se pueden reagrupar a modo de obtener una ecuación en la variable m.

$$(n^2 + 3n)m^2 + (n - 3n^2)m + 2n^3 = 0.$$

Más aún, notemos que $n^2 + 3n = n(n + 3) = 0$ y $n \neq 0$ por hipótesis, en tanto que para $n = -3$ se obtiene la solución $m = -9/5$, que no es entera. De tal modo, podemos suponer que la ecuación en cuestión es cuadrática en m. Consideremos pues el discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= (n - 3n^2)^2 - 4(n^2 + 3n)(2n^3) \\ &= n^2 - 6n^3 + 9n^4 - 8n^5 - 24n^4 \\ &= -n^2(8n^3 + 15n^2 + 6n - 1). \end{aligned}$$

Claramente, para $n \geq 1$ se tiene que $\Delta < 0$ por lo que no tenemos soluciones en este caso. Así que n tiene que ser un entero negativo. Notemos además que si $n = -1$ entonces $\Delta = 0$. Podemos concluir que Δ tiene un factor $n - (-1) = n + 1$. Así, efectuando la división correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} 8n^3 + 15n^2 + 6n - 1 &= (n + 1)(8n^2 + 7n - 1) \\ &= (n + 1)(n + 1)(8n - 1), \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\Delta = n^2(n + 1)^2(1 - 8n).$$

Luego Δ es un cuadrado perfecto si y solo si $(1 - 8n)$ es un cuadrado perfecto. Dado que $(1 - 8n)$ es impar tenemos que existe un entero k no negativo tal que

$$1-8n = (2k+1)^2 \quad \to \quad 1-8n = 4k^2+4k+1 \quad \to \quad -2n = k^2+k \quad \to \quad n = -\frac{k(k+1)}{2},$$

de modo que

$$n + 3 = -\frac{k^2 + k - 6}{2}, \quad n + 1 = -\frac{k^2 + k - 2}{2} \quad \text{y} \quad 1 - 3n = -\frac{3k^2 + 3k + 2}{2}.$$

Ahora bien, aplicando la fórmula cuadrática tenemos

$$\begin{aligned} m &= \frac{-(n-3n^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(n^2+3n)} \\ &= \frac{-n(1-3n) \pm n(n+1)\sqrt{1-8n}}{2n(n+3)} \\ &= \frac{3n-1 \pm (n+1)\sqrt{1-8n}}{2(n+3)} \\ &= \frac{(-3k^2-3k-2) \pm (2k^3+3k^2-3k-2)}{2(-k^2-k+6)}. \end{aligned}$$

Para la solución que lleva el signo $(+)$ consideramos

$$-3k^2-3k-2+2k^3+3k^2-3k-2 = 2k^3-6k-4 = 2(k^3-3k-2)$$

y aplicamos la división de polinomios para obtener

$$k^3-3k-2 = (-k^2-k+6)(-k+1)+(4k-8).$$

Luego

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{k^3-3k-2}{-k^2-k+6} \\ &= \frac{(-k^2-k+6)(-k+1)}{-k^2-k+6} + \frac{4k-8}{-k^2-k+6} \\ &= 1-k+\frac{4(k-2)}{-(k-2)(k+3)} \\ &= 1-k-\frac{4}{k+3}. \end{aligned}$$

Como tanto m_1 y $(1-k)$ son enteros, $k+3 \geq 3$ debe ser un divisor de 4, a modo de que $4/(k+3)$ sea entero. Así, $k+3=4$ y en consecuencia

$$k=1 \quad \to \quad m_1=-1 \quad \to \quad n_1 = -\frac{1\cdot 2}{2} = -1.$$

Análogamente, para el signo $(-)$ tenemos

$$\begin{aligned} -3k^2-3k-2-2k^3-3k^2+3k-2 &= -2k^3-6k^2 = 2(-k^3-3k^3), \\ -k^3-3k^3 &= (-k^2-k+6)(k+2)+(-4k-12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= \frac{-k^3-3k^2}{-k^2-k+6} \\
&= \frac{(-k^2-k+6)(k+2)}{-k^2-k+6} + \frac{-4k-12}{-k^2-k+6} \\
&= k+2-\frac{4(k+3)}{-(k-2)(k+3)} \\
&= k+2+\frac{4}{k-2}.
\end{aligned}$$

Entonces $k-2 \geq -1$ es un divisor de 4, y por lo tanto $k-2 = -1, 1, 2, 4$, o de manera equivalente $k = 1, 3, 4, 6$. Analizamos cada caso:

$$\begin{array}{lclcl}
k=1 & \to & m_2=-1 & \to & n_2 = -\frac{1\cdot 2}{2} = -1, \\
k=3 & \to & m_2=9 & \to & n_2 = -\frac{3\cdot 4}{2} = -6, \\
k=4 & \to & m_2=8 & \to & n_2 = -\frac{4\cdot 5}{2} = -10, \\
k=6 & \to & m_2=9 & \to & n_2 = -\frac{6\cdot 7}{2} = -21.
\end{array}$$

Concluimos que existen únicamente cuatro parejas (m,n) que son soluciones: $(-1,-1)$, $(9,-6)$, $(8,-10)$ y $(9,-21)$.

Problema 9. *(Singapur)* Hallar todos los enteros positivos n tales que la ecuación

$$xy^2 + y^2 - x - y - n = 0$$

tiene una infinidad de soluciones enteras (x,y).

Solución 9. Consideremos la expresión como una ecuación en y:

$$(x+1)y^2 - y - (x+n) = 0.$$

Si $x=-1$, entonces obtenemos $y = 1-n$, de modo que la ecuación tiene solamente una solución. Así podemos suponer que $x \neq -1$ y en consecuencia la ecuación es cuadrática en la variable y.

Aplicando la fórmula general obtenemos

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(x+1)(x+n)}}{2(x+1)},$$

donde el discriminante cumple

$$\Delta = 1 + 4(x+1)(x+n) = 4x^2 + 4(n+1)x + (4n+1)$$

Dado que buscamos que el discriminante sea un cuadrado perfecto, usamos la técnica de completar el cuadrado. Notemos que

$$4x^2 + 4(n+1)x = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (n+1),$$

de modo que

$$4x^2 + 4(n+1)x + (n+1)^2 = (2x + (n+1)^2).$$

En consecuencia

$$(n+1)^2 = 4n+1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (2x+(n+1))^2(n+1)^2 = 4n+1.$$

Resolvemos esta ecuación en n

$$n^2 + 2n + 1 = 4n + 1 \quad \to \quad n^2 - 2n = 0 \quad \to \quad n(n-2) = 0 \quad \to \quad n = 0, 2.$$

Si $n = 0$, entonces $\Delta = (2x+1)^2$ y por lo tanto

$$y = \frac{1 + (2x+1)}{2(x+1)} = \frac{2x+2}{2x+2} = 1, \quad (\text{si } x \neq -1).$$

De manera similar, si $n = 2$, entonces $\Delta = (2x+3)^2$ y en este caso obtenemos la solución

$$y = \frac{1 - (2x+3)}{2(x+1)} = \frac{-2x-2}{2x+2} = -1, \quad (\text{si } x \neq -1).$$

Finalmente, supongamos que $\Delta = z^2$ y consideremos $z = 2x + a$, así

$$z^2 = (2x)^2 + 2(2x)a + a^2 = 4x^2 + 4xa + a^2.$$

Como $\Delta = 4x^2 + 4(n+1)x + (4n+1)$ entonces igualando las expresiones de z^2 obtenemos

$$4(n+1)x + (4n+1) = 4ax + a^2.$$

Ya que dos polinomios son iguales si y solo si sus coeficientes correspondientes coinciden. Luego

$$4(n+1) = 4a, \quad 4n+1 = a^2 \quad \to \quad (n+1)^2 = 4n+1,$$

de modo notemos que esta condición además de suficiente, es necesaria para obtener que Δ es un cuadrado perfecto.

Resumiendo, para cualquier entero $x \neq -1$, $(x, 1)$ es solución de $xy^2 + y^2 - x - y = 0$ y $(x, -1)$ es solución de $xy^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$. Así, los valores buscados son $n = 0$ y $n = 2$.

Las fórmulas de Vietè

Una de las propiedades más importantes de la ecuación cuadrática –y de la teoría de polinomios en general– es la relación que existe entre sus soluciones y sus coeficientes. Dichas relaciones se conocen como las *fórmulas de Vietè*, debido al matemático francés Francois Vietè que las estudió extensivamente a finales del siglo XVI. En el caso de la ecuación cuadrática, las fórmulas de Vietè involucran la suma y el producto de las soluciones. Usando la fórmula general tenemos que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

y de manera similar

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Problema 10. *(AMC)* Encuentra la suma de los recíprocos de las soluciones de la ecuación

$$\frac{2003}{2004}x + 1 + \frac{1}{x} = 0.$$

Solución 10. Multiplicando ambos lados de la igualdad por x llegamos a la ecuación cuadrática

$$\frac{2003}{2004}x^2 + x + 1 = 0.$$

Aplicando las fórmulas de Vietè obtenemos

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2003/2004} = -\frac{2004}{2003},$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2003/2004} = \frac{2004}{2003}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-2004/2003}{2004/2003} = -1.$$

Problema 11. *(China)* Halla todos los valores de x que satisfacen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2020^2 + \frac{1}{2020^2}.$$

Solución 11. Multiplicamos por x^2 ambos lados de la ecuación y reordenamos para obtener

$$x^4 - \left(2020^2 + \frac{1}{2020^2}\right)x^2 + 1 = 0,$$

que haciendo el cambio de variable $y = x^2$ toma la forma de la ecuación cuadrática

$$y^2 - \left(2020^2 + \frac{1}{2020^2}\right) y + 1 = 0.$$

Consideremos

$$y_1 = 2020^2 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{1}{2020^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2020^2 + \frac{1}{2020^2}, \\ y_1 y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Por las fórmulas de Vietè tenemos que y_1 y y_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática en y. Luego las soluciones de la ecuación original se calculan mediante $x = \pm\sqrt{y}$. Así, las soluciones buscadas son

$$x_1 = 2020, \quad x_2 = -2020, \quad x_3 = \frac{1}{2020}, \quad x_4 = -\frac{1}{2020}.$$

Problema 12. *(AMC)* Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + mx + n = 0$ son el doble de las de $x^2 + px + m = 0$. Si m, n y p son diferentes de 0. ¿Cuál es el valor de n/p?

Solución 12. Sean x_1 y x_2 las soluciones de $x^2 + px + m = 0$. Por las fórmulas de Vietè deducimos

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = m.$$

Por otro lado, al aplicar las fórmulas de Vietè a $x^2 + mx + n = 0$ obtenemos

$$2x_1 + 2x_2 = -m \quad \text{y} \quad 2x_1 \cdot 2x_2 = n.$$

Así

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) = \frac{m}{2}, \\ n &= 4x_1 x_2 = 4m. \end{aligned}$$

Luego se cumple

$$\frac{n}{p} = \frac{4m}{m/2} = 8.$$

Las fórmulas de Vietè también nos permiten dar una descripción diferente de la ecuación cuadrática. En efecto, factorizando a en la ecuación (4) obtenemos

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0, \\ a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) &= 0, \\ a(x - x_1)(x - x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Una de las consecuencias más importantes de esta relación es que nos permite analizar las desigualdades cuadráticas. En efecto, supongamos que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales. Denotemos por $x_{\min}$ a la menor de ellas y por $x_{\max}$ a la mayor. Sea

$$f(x) = a(x - x_{\min})(x - x_{\max})$$

y supongamos que $a > 0$. Luego, si $x < x_{\min}$ entonces $x < x_{\max}$ y por lo tanto $(x - x_{\min}) < 0$, y de manera similar, $(x - x_{\max}) < 0$. En consecuencia, $(x - x_{\min})(x - x_{\max}) > 0$ y luego $f(x) > 0$. Por otro lado, en el caso $x_{\min} < x < x_{\max}$ tenemos $(x - x_{\min}) > 0$ y $(x - x_{\max}) < 0$, con lo cual $f(x) < 0$. Finalmente, si $x > x_{\max}$ entonces $x > x_{\min}$ y $f(x) > 0$. Cuando $a < 0$ las desigualdades en cada uno de los casos anteriores llevan el signo contrario.

Los resultados de este análisis lo podemos sintetizar en la siguiente tabla

	$x < x_{\min}$	$x_{\min} < x < x_{\max}$	$x > x_{\max}$
$a > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$

Problema 13. *(Canadá)* Encuentra el mayor número real z para el cual el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ xy + yz + zx &= 3 \end{aligned}$$

tenga solución real.

Solución 13. De la primera ecuación concluimos

$$y = 5 - x - z.$$

Luego sustituimos en la segunda ecuación

$$x(5 - x - z) + (5 - x - z)z + zx = 3 \quad \rightarrow \quad 5x - x^2 - xz + 5z - z^2 = 3.$$

Notemos que, tras reordenar esta expresión, obtenemos la siguiente ecuación cuadrática en la variable x:

$$x^2 + (5 - z)x + (z^2 - 5z + 3) = 0,$$

cuyas soluciones serán reales si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta \\ &= (5 - z)^2 - 4(z^2 - 5z + 3) \\ &= 25 - 10z + z^2 - 4z^2 + 20z - 12 \\ &= -3z^2 + 10z + 13. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula general, tenemos que las soluciones de la ecuación

$$-3z^2 + 10z + 13 = 0$$

están dadas por

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-3)(13)}}{2(-3)} = \frac{-10 \pm 16}{-6}$$

y así

$$z_{\text{min}} = \frac{-10 + 16}{-6} = -1 \quad \text{y} \quad z_{\text{max}} = \frac{-10 - 16}{-6} = \frac{13}{3}.$$

En consecuencia, $\Delta \geq 0$ si y solo si

$$-1 \leq z \leq \frac{13}{3},$$

de modo que el valor buscado es $z = \dfrac{13}{3}$.

Cerramos este trabajo haciendo notar una interesante relación que existe entre las fórmulas de Vietè y el método de completar el cuadrado que dió origen a nuestra discusión sobre la ecuación cuadrática. Retomemos el ejemplo de la ecuacion (3). Las fórmulas de Vietè nos indican que se cumple

$$x_1 + x_2 = -7, \quad x_1 x_2 = -60$$

La primera fórmual de Vietè puede interpretarse como que el promedio de las dos soluciones es $-7/2$. Si ambas soluciones son iguales, cada una de ellas es igual a este promedio, es decir

$$x_1 = -\frac{7}{2} = x_2.$$

En caso contrario, una de ellas es menor al promedio y la otra es mayor. Es decir, existe un número $d > 0$ tal que

$$x_1 = -\frac{7}{2} - d, \quad x_2 = -\frac{7}{2} + d.$$

Sustituyendo ahora en la segunda fórmula de Vietè obtenemos

$$\begin{aligned} -60 &= x_1 x_2 \\ &= \left(-\frac{7}{2} - d\right)\left(-\frac{7}{2} + d\right) \\ &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - d^2, \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$d^2 = 60 + \frac{49}{4} = \frac{249}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

Finalmente, podemos deducir a las soluciones

$$x_1 = -\frac{7}{2} - \frac{17}{2} = 14, \qquad x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{17}{2} = 5.$$

Es realmente sorprendente verificar que este método para resolver la ecuación cuadrática basado en las fórmulas de Vietè no era del todo conocido, hasta que el matemático Po-Shen Loh[3] lo popularizó apenas en 2019 [3]. Este ejemplo muestra una vez más la veracidad de las palabras de Maryam Mirzakhani:[4] «las matemáticas, [incluso las más antiguas], guardan hermosos secretos destinados solo a sus más pacientes seguidores»[5].

Agradecimientos:

Los autores agradecen al árbitro por su diligente revisión y sus valiosas observaciones y comentarios, que sin duda ayudaron a mejorar considerablemente este artículo.

Problemas propuestos

Problema 14. *(Balcanes)* Prueba que el número

$$N = \underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$$

es un cuadrado perfecto.

Problema 15. *(AMC)* ¿Cuántos pares ordenados de enteros (m, n) satisfacen la siguiente ecuación?

$$m^2 + mn + n^2 = m^2n^2.$$

Problema 16. *(AMC)* Supongamos que $a \neq 0 \neq b$ son números reales que satisfacen la ecuación

$$x^2 + ax + b = 0.$$

¿Qué posibles valores puede tomar el par (a, b)?

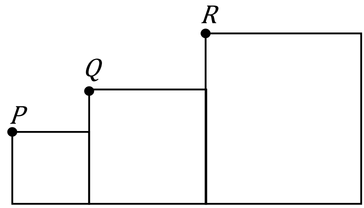
[3]Po-Shen Loh obtuvo una medalla de plata en la IMO (Bucarest, 1999) y posteriormente fungió como entrenador de los equipos de USA en la IMO de 2013 a 2023.

[4]Maryam Mirzakhani obtuvo medallas de oro en las dos ediciones de la IMO en que participó (Hong-Kong, 1993 y Toronto, 1994), obteniendo en la segunda puntaje perfecto. Ha sido la única mujer recipendaria de la Medalla Fields, uno de los más altos honores en el ámbito de las matemáticas. Murió a los 40 años en 2017.

Problema 17. *(Singapur)* Halla el valor de

$$\sqrt{45-\sqrt{2000}}+\sqrt{45+\sqrt{2000}}.$$

Problema 18. *(Reino Unido)* Los vértices P, Q, R de los cuadrados de la figura están alineados. Un lado del cuadrado mayor mide 50cm. Si un lado del cuadrado mediano mide 8cm más que un lado del cuadrado menor, ¿qué posibles medidas tiene el lado del cuadrado menor?



Problema 19. *(AMC)* Sean d y e las soluciones de la ecuación

$$2x^2+3x-5=0$$

¿Cuál es el valor de $(d-1)(e-1)$?

Problema 20. *(Canadá)* Encuentra todos los números positivos x tales que el número, su parte entera y su parte fraccionaria están en progresión geométrica.

Problema 21. *(Reino Unido)* ¿Cuántas parejas de enteros (m, n) satisfacen la siguiente ecuación?

$$\sqrt{m-\sqrt{m+23}}=2\sqrt{2}-n.$$

Problema 22. *(Nórdicos)* Encuentra todos los valores de x para los cuales todos los números de la forma

$$x^n+\frac{1}{x^n},\quad n=0,1,2,\ldots$$

son enteros positivos.

Problema 23. *(Canadá)* Encuentra todas las soluciones reales de la ecuación

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3.$$

Problema 24. *(China)* Halla todos los enteros positivos k que cumplan la siguiente propiedad: si a, b, c son tres números positivos tales que

$$k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2),$$

entonces existe un triángulo cuyos lados tienen medidas a, b, c.

Problema 25. *(Balcanes)* Halla todas las soluciones enteras no negativas (x, y) de la ecuación

$$9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y.$$

Problema 26. *(Singapur)* Encuentra el mayor número real a tal que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a^2 - bc - 8a + 7 &= 0, \\ b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 &= 0. \end{aligned}$$

tiene solución real.

Problema 27. *(Balcanes)* Halla todos los enteros positivos distintos x, y, z tales que

$$4^x + 4^y + 4^z$$

es un cuadrado perfecto.

Problema 28. *(Nórdicos)* Encuentra todas las funciones $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tales que para todo x se cumple

$$f(x(1 + |x|)) \leq x \leq f(x)(1 + |f(x)|).$$

La solución de todos los problemas propuestos se publicará en el siguiente número.

Bibliografía

[1] J. Friberg. *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts.* Springer Verlag, (2007).

[2] J. Hernández Santiago. *Solving problems by looking at a discriminant.* Mathematical Reflections (4), 1-10, (2020).

[3] P. S. Loh. *A Simple Proof of the Quadratic Formula.* Preprint. arXiv.1910.06709, (2019). https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.06709

[4] R. McMillan. *Babylonian quadratics.* The Mathematics Teacher. **77**(1), 63–65, (1984).

[5] M. Mirzakhani. *Interview for the 2008 Annual Report.* Clay Mathematics Institute, (2008). `https://www.claymath.org/library/annual_report/ar2008/08Interview.pdf`

[6] T. Phillips. *Completing the square: the prehistory of the quadratic formula.* Feature Column. American Mathematical Society, (2020). https://mathvoices.ams.org/featurecolumn/2020/11/01/fc-2020-10-2/

[7] D. Sánchez Sánchez, C. Montes Fajardo y C. J. Luque Arias. *Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de Los Elementos de Euclides* en Memorias del XV Encuentro de Geometría y Aplicaciones. C. Ruiz et al. eds., Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, (2005).

Problemas de práctica

A continuación presentamos 10 problemas de práctica seleccionados especialmente para este número. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. ¿De cuántas formas podemos llenar una cuadrícula de 6×6 con 1 o -1 de manera que todas las subcuadrículas de 2×2 tengan suma igual a cero?

Problema 2. Encuentra todos los números de 4 cifras $abcd$ tales que $abcd = abc + dcb$.

Problema 3. ¿Puede escribirse 4202 como suma de 2024 números enteros consecutivos?

Problema 4. Encuentra todos los números enteros positivos m tales que $m^2 - 19m + 91$ es un cuadrado perfecto.

Problema 5. Encuentra todos los números primos p tales que $3^p + 5^p - 1$ también es primo.

Problema 6. Sea ABC un triángulo en donde $\angle A > 90^\circ$. Construye sobre cada lado, de forma exterior, triángulos semejantes isósceles ABR, BCP y CAQ con los ángulos en los vértices P, Q, R iguales a $2\angle A - 180^\circ$. Sea T la reflexión de P en BC. Demuestra que $ARTQ$ es un paralelogramo.

Problema 7. ¿Existen 2024 enteros positivos consecutivos tales que entre ellos hay *exactamente* 25 números primos?

Problema 8.
Luis Mauricio, un joven astuto y discreto,
a su celular un código de cuatro cifras ha puesto.
Ningún cero en él se puede encontrar
y una regla especial ha de guardar.
La cifra menor, la primera en hallar,
divide a alguna de las otras que ha de teclear.

Esta segunda a una tercera, va a dividir,
y esa tercera a alguna cuarta, como has de intuir.
Si sin preguntar la clave se quiere hallar,
¿cuántos intentos habrá que realizar?

Problema 9.
Un cuadrilátero, figura de cuatro lados,
en sus ángulos un secreto tiene encerrado,
pues si sus medidas en cierto orden pones con cuidado
la resta entre consecutivos siempre es un mismo número dado.
Pero si el ángulo más pequeño,
por la tercera parte divides con mucho empeño
el mismo valor obtendrías como resultado
que la resta de los ángulos consecutivos antes ordenados.
En este problema, te pido a ti participante,
que encuentres la medida en grados del ángulo más grande.

Problema 10.
Con su padre y madre acude, cada niño, a la fiesta de Cirilo.
ninguno lleva hermano, es importante decirlo.
Un tamal se come cada niño, y cada madre come dos.
Tres tamales se come el padre, despacio, para no tener tos.
De dos mil veinticuatro la cuenta de los tamales excede,
Y de pronto la siguiente observación hace Mercedes:
"Cuando de la cantidad de tamales, el número de divisores se encuentra,
verás que coincide con doce el monto de dicha cuenta"
Si cada niño además se come un chocolate,
¿Al menos cuántos debe haber para que a ninguno falte?

Soluciones a los problemas de práctica.

Solución 1. Fijémenos en el renglón superior. Si en algún par de sus casillas consecutivas aparecen dos o más entradas iguales, el tablero completo queda determinado. Por ejemplo, en el tablero de abajo hay un grupo de varios 1 consecutivos en la fila superior, lo cual obliga a que debajo de ellos haya un -1, y en la tercera fila aparezcan 1, y así sucesivamente

$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$
$\cdots$	-1	-1	$\cdots$	-1	$\cdots$
$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

Pero el resto del tablero queda determinado porque si hay un -1 adyacente al bloque superior de 1, la posición inmediata inferior, marcada con x en la imagen, queda determinada y a su vez el resto de la columna. Un argumento similar hará que las demás columnas queden fijas.

$\cdots$	1	$\cdots$	**1**	**-1**	$\cdots$
$\cdots$	-1	$\cdots$	**-1**	x	$\cdots$
$\cdots$	1	$\cdots$	1		$\cdots$
	$\vdots$		$\vdots$		

El argumento anterior también aplica si hay dos o más ceros consecutivos, en cuyo caso el resto del tablero está determinado.

Por otro lado, la fila superior se puede llenar de $2^6 = 64$ maneras, de las cuales todas tienen alguna pareja de valores consecutivos iguales, excepto si se llena como $1, -1, 1, -1, 1, -1$ o $-1, 1, -1, 1, -1, 1$, por lo que hay 62 posibles maneras de llenar la fila superior con entradas consecutivas iguales que corresponden cada una a un tablero.

Ahora, si la fila superior está llena con $1, -1, 1, -1, 1, -1$, podemos llenar de manera arbitraria el resto de la primera columna, y ello determina completamente el tablero.

1	-1	1	-1	1	-1
a	$-a$	a	$-a$	a	$-a$
b	$-b$	b	$-b$	b	$-b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Concluimos que hay 2^5 formas de completar este tipo, y de manera similar habrá 2^5 formas de completar cuando se inicia con $-1, 1, -1, 1, -1, 1$. De esta manera, el total de arreglos es $(2^6 - 2) + 2^5 + 2^5 = 126$. Te invitamos a generalizar esta solución para tableros de $n \times n$.

Solución 2. Dado que todo número deja el mismo residuo al dividirlo entre 9 que el residuo que deja la suma de sus cifras, el residuo que deja la división entre 9 de $abc + dcb$ es igual al residuo de $a + b + c + d + c + b$, que también debe ser el residuo que deja $a + b + c + d$. Concluimos entonces que $c + b$ deja residuo 0 y por lo tanto es un múltiplo de 9, que solo puede ser $0, 9$ o 18. No es cero, porque ello implicaría que $b = c = 0$ y por tanto $d = 0$ (al considerar la cifra de las unidades). Entonces la suma se convierte en $a00 + 000 = a000$ lo cual no es posible.

Así, tenemos la posibilidad $b + c = 9$ y al realizar la suma $abc + dcb$ obtendremos $(a + d) \cdot 100 + 99$ y por tanto $c = d = 9$. Considerando la posición de las unidades, deducimos que $b = 0$, dado que $abc + dcb \leq 999 + 999 = 1998$, necesariamente $a = 1$. Entonces, en este caso, obtenemos la respuesta 1099.

Cuando $b + c = 18$ por lo que $b = c = 9$, tomando en cuenta la posición de las unidades, obtendremos $d = 8$, y al igual que antes a solo puede ser 1, por lo que el número debería ser 1998, pero ese valor no es igual a $199 + 988$ por lo que no obtenemos una nueva solución. La conclusión es que 1099 es el único número con las condiciones pedidas.

Solución 3. Podemos representar los 2024 números consecutivos como $a, a + 1$, $a + 2, \ldots, a + 2023$ y observar que la suma de todos ellos es igual a

$$2024a + \frac{2023 \cdot 2024}{2}.$$

Dado que 2024 es múltiplo de 23, ambos sumandos son múltiplos de 23 y por tanto también la suma total. Sin embargo, $4202 = 2 \cdot 11 \cdot 191$ no es múltiplo de 23, por lo que la suma nunca lo podremos expresar como suma de 2024 enteros consecutivos.

Solución 4. Siguiendo las ideas presentadas en el artículo de este número, podemos expresar $m^2 - 19m + 91 = k^2$ para algún valor positivo de k, ya que k no puede ser cero dado que la ecuación $m^2 - 19m + 91 = 0$ no tiene soluciones reales.

Reordenando los términos de la expresión obtenemos una ecuación cuadrática $m^2 - 19m + (91 - k^2) = 0$ que sí debe tener solución entera m, y por tanto necesariamente el discriminante $\Delta = 19^2 - 4(91 - k^2)$ es un cuadrado perfecto r^2.

Pero entonces $4k^2 - r^2 = 4 \cdot 91 - 19^2 = 364 - 361 = 3$. Factorizando la diferencia de cuadrados tenemos $(2k - r)(2k + r) = 3$ y por tanto $2k + r = 3, 2k - r = 1$, de donde $k = 1, r = 1$, y por tanto la ecuación original se convierte en $m^2 - 19m + 91 = 1$, que equivale a $m^2 - 19m + 90 = 0$ que tiene por soluciones $m = 9, m = 10$.

Solución 5. Si $p \geq 5$, por el pequeño teorema de Fermat, dado que 7 es coprimo con 3 y 5, se cumple $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ y $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Por otro lado, si $p \geq 5$ es primo, debe ser de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$. Cuando p es de la forma $6k + 1$ se tiene que:

$$3^p + 5^p - 1 \equiv 3^{6k+1} + 5^{6k+1} - 1 \equiv 3(3^6)^k + 5(5^6)^k - 1 \equiv 3 + 5 - 1 \equiv 0 \pmod{7}.$$

De manera similar, se tiene que $3^p + 5^p - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ cuando p es de la forma $6k + 5$. Lo anterior nos dice que si $p \geq 5$, la expresión siempre es un múltiplo de 7 y no será primo. Solo nos queda verificar $p = 2$, que da 33 y no es primo, y luego $p = 3$ que da 151 que sí es primo. Por tanto la única posibilidad es $p = 3$.

Solución 6. Si $\angle CAB = \alpha$, los ángulos $\angle P, \angle Q, \angle R, \angle T$ miden $2\alpha - 180$. Pero como los triángulos construidos son isósceles y semejantes, los ángulos en sus bases miden

$$\frac{1}{2}\left(180^\circ - (2\alpha - 180)\right) = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha.$$

Lo anterior quiere decir que los puntos C, A, R son colineales y también lo son B, A, Q. De esta manera, $CBAQ$ es un cuadrilátero cíclico, y por el recícproco del teorema del ángulo inscrito, el punto T también estará en la misma circunferencia.

Por otro lado, $\angle ABR = \angle CBT$ por ser correspondientes en triángulos semejantes, de modo que $\angle CBA = \angle TBR$. Por ángulos en la circunferencia, también serán iguales a $\angle TCR$ y $\angle TQR$ (compartiendo el arco TR) y a $\angle CRQ$, $\angle CTQ$ (compartiendo arco CQ). Concluimos entonces que $\angle CTQ$ y $\angle TCR$ son alternos internos iguales entre QT y CR atravesados por CT y por tanto QT y CR son paralelas. Un argumento similar en la otra mitad de la figura garantiza que TR y QA son también paralelas y por tanto $ARTQ$ es un paralelogramo.

Solución 7. Sí, existen 2024 enteros positivos consecutivos entre los cuales hay exactamente 25 primos.

Vamos a denotar por $[a, b]$ el intervalo de números enteros $a, a + 1, a + 2, \ldots, b - 1, b$. Observemos primero que, del 1 al 2024 hay más de 25 primos. Es decir, el intervalo $[1, 2024]$ contiene más de 25 primos.

Ahora, supongamos que en el intervalo $I = [a, a + 2023]$ (que tiene 2024 elementos enteros) hay k números primos, y consideremos el intervalo $J = [a + 1, a + 2024]$. Afirmamos que la cantidad de primos en J solo puede ser:

- $k + 1$ si a no es primo pero $a + 2024$ sí.
- k si a no es primo y $a + 2024$ tampoco, o cuando a es primo y $a + 2024$ también.
- $k - 1$ si a es primo pero $a + 2024$ no.

Lo anterior quiere decir que si nos fijamos en la cantidad de primos en los intervalos

$$[1, 2024], [2, 2025], [3, 2026], [4, 2027], \ldots$$

obtenemos una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ en donde $a_1 > 25$ y cada término difiere del anterior en, a lo más 1 (aumentando o disminuyendo).

Consideremos ahora $z = 2025!$ y el intervalo $[z + 2, z + 2025]$. Afirmamos que en ese intervalo no hay ningún número primo, ya que $z_j = 2025! + j$ es múltiplo de j para $j = 2, 3, \ldots, 2025$. Dicho de otro modo, $a_{2025!+2} = 0$.

Como la sucesión comienza con $a_1 > 25$, los términos difieren a lo mucho en 1, y existen términos iguales a cero, es necesario que en algún momento pasemos por el valor $a_j = 25$ para algún valor de j.

Solución 8. Se necesitan cuatro números que se dividan de forma encadenada, todos ellos de una cifra. La única forma de lograrlo, es que los números sean $1, 2, 4$ y 8. De este modo, hay $4! = 24$ posibles claves para comprobar.

Solución 9. La condición del problema establece que los ángulos de la figura están en progresión aritmética. Adicionalmente, la diferencia es precisamente la tercera parte del menor ángulo, por lo que si d representa la diferencia común, entonces los ángulos deben ser $3d, 4d, 5d, 6d$. La suma de ellos es $18d$, que al ser cuadrilátero, debe ser igual a 360°. Concluimos entonces que $d = 20^\circ$ y por tanto el mayor de los ángulos es $6d = 120^\circ$.

Solución 10. Si representamos por x la cantidad de niños, la cantidad total de tamales que comieron es $x + 2x + 3x = 6x$, por lo que la cantidad de tamales es múltiplo de 6 y también debe ser una cantidad mayor a 2024.

El menor múltiplo de 6 que excede a 2024 es 2028, pero $2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$ y por tanto tiene 18 divisores. El siguiente múltiplo de 6 es $2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113$ y por tanto tiene $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ divisores. Así, la menor cantidad posible de tamales es 2034 y $2034/6 = 339$. De manera que se necesitan al menos 339 chocolates para que a nadie le falte.

Problemas de entrenamiento

Año 2024, No. 2

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este segundo número del año 2024. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la primera entrega de 2025 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, anunciamos que estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de diciembre de 2024**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista deberán ser remitidas por *email* a

`revistaomm@gmail.com`

¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1. Demuestre que hay una infinidad de números enteros positivos i, j, k y ℓ tales que los números

$$ij + 1, \quad jk + 16, \quad k\ell + 4, \quad i\ell + 9$$

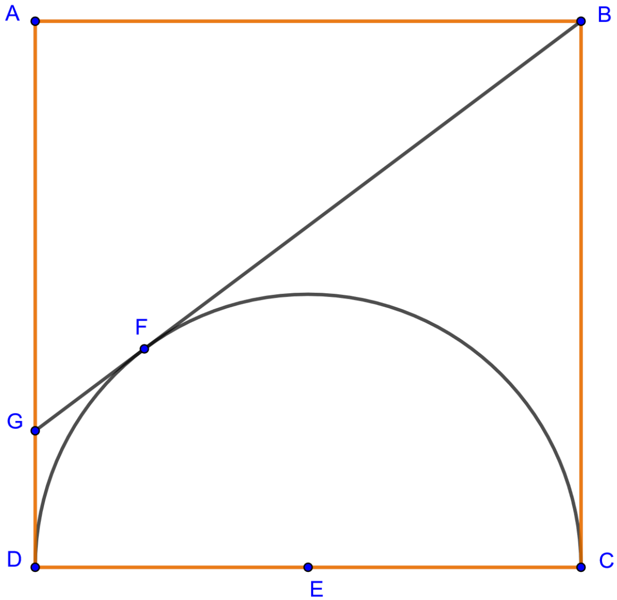
son cuadrados perfectos.

Problema 2. Sea n un número de tres cifras diferentes (y ninguna de ellas igual a 0). Denotemos con n_d al número que se obtiene al escribir los dígitos de n en orden descendente y sea n_a el número que se obtiene al escribir los dígitos de n en orden ascendente. Determine todos los números n para los cuales se cumple que

$$n_d - n_a = n.$$

Problema 3. Se lanza un dado dos veces. Los números obtenidos se consideran para trazar un triángulo rectángulo: uno de los números determina la longitud de la hipotenusa del triángulo mientras que el otro determina la longitud de uno de los catetos. Calcule la probabilidad de que el área del triángulo sea mayor a 7 unidades.

Problema 4. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 8, G es el punto en el que la tangente (desde B) a la semicircunferencia de centro E cruza a AD y F es el respectivo punto de tangencia. Calcule la longitud de BG.



Problema 5. Sean AB un segmento, M el punto medio de AB y P un punto por el que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ no pasa. Construye la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P usando únicamente una regla sin marcas.

Problema 6. Irene, María y Nora han corrido 20 veces. Cada vez que lo hicieron anotaron su orden de llegada. No hubo ningún empate y llegaron en todos los órdenes posibles. Irene llegó antes que María 12 veces, María antes que Nora 11 veces y Nora antes que Irene 14 veces. ¿Cuántas carreras ganó cada una?

Problema 7. Calcule la siguiente suma:

$$(\mathfrak{r}_1 + \sigma(1)) + (\mathfrak{r}_2 + \sigma(2)) + (\mathfrak{r}_3 + \sigma(3)) + \cdots + (\mathfrak{r}_{100} + \sigma(100))$$

donde $\mathfrak{r}_k$ denota al residuo que se obtiene cuando se divide el número 100 entre k y $\sigma(k)$ representa la suma de los divisores positivos del número k.

Problema 8. En un pizarrón está escrito un número primo p. Una persona observa el número primo escrito en el pizarrón, procede a escribir todos los divisores primos del número $p-1$ y luego abandona la sala en la que se encuentra el pizarrón. ¿Para cuáles números primos p la persona deja anotados en el pizarrón todos los números primos menores que p?

Problema 9. Sea $\mathfrak{X}$ el conjunto conformado por todos los números enteros de la forma $p \cdot q$ donde p y q son números primos distintos. Sea A un subconjunto de $\mathfrak{X}$ y sea $B = \mathfrak{X} \setminus A$ (el conjunto conformado por los elementos de $\mathfrak{X}$ que no pertenecen a A). Demuestre que existe un conjunto infinito P de números primos tales que los números $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$, con $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ elementos distintos de P, pertenecen todos a A o pertenecen todos a B.

Problema 10. Sea N un número entero positivo. Ana y Beto juegan el siguiente juego. Beto cuenta los pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que $a + b = N$. Ana cuenta los pares ordenados (c, d) de números enteros positivos tales que $c^{-1} + d^{-1} = N^{-1}$. Gana el jugador que obtiene el mayor número de pares ordenados. ¿Para cuáles N's gana Ana?

☞ Agradecemos a Daniel Alfonso Santiesteban (Guerrero, Méx.) por enviar los problemas que en esta lista aparecen en las posiciones **2** y **3** y a Emiliano Fernández Almazán (Veracruz, Méx.) por contribuir con el problema **8**.

Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2023, No. 3)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la tercera entrega de 2023 de Tzaloa. En esta ocasión, agradecemos a Henry J. Ricardo de Purchase (NY, USA) por haber enviado su solución al problema 5 de esa lista y a José Luis Carballo Lucero de Baja California Sur por haber enviado su solución al problema 6; por otra parte, reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente.

En el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en el cuarto número de 2023 de la revista. ¡Aún están a tiempo de enviar soluciones!

Problema 1. Sea n un número entero mayor que 2. Considere n números enteros distintos de 0 tales que cada uno de ellos es divisible por la suma de los otros $n-1$ números enteros. Demuestre que la suma de los n números enteros es igual a 0.

Solución. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números enteros como en el planteamiento del problema. Como cada uno de ellos es divisible por la suma de los otros $n-1$ números enteros entonces podemos garantizar la existencia de $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \kappa_1 \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 1}}^{n} a_\ell \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \kappa_2 \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 2}}^{n} a_\ell \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \kappa_3 \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 3}}^{n} a_\ell \\
&\vdots \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \kappa_n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq n}}^{n} a_\ell .
\end{aligned}$$

Si $\kappa_j = 1$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $a_j = 0$; puesto que esto entra en conflicto con una de las hipótesis sobre los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en lo que sigue va implícita la restricción de que ninguno de los números $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ es igual a 1. Además, si suponemos $\kappa_j = 0$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, esto implicaría que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, por lo cual a partir de este momento también asumimos que ninguno de los números $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ es igual a 0.

Hagamos $\mathcal{S} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Supongamos que $\mathcal{S} \neq 0$. Al multiplicar ambos lados de la primera ecuación por $\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq 1}}^{n} \kappa_m$, ambos lados de la segunda ecuación por $\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq 2}}^{n} \kappa_m$ y así sucesivamente, vemos que el anterior sistema de ecuaciones se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq 1}}^{n} \kappa_m \cdot \mathcal{S} &= \prod_{m=1}^{n} \kappa_m \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 1}}^{n} a_\ell \\
\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq 2}}^{n} \kappa_m \cdot \mathcal{S} &= \prod_{m=1}^{n} \kappa_m \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 2}}^{n} a_\ell \\
\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq 3}}^{n} \kappa_m \cdot \mathcal{S} &= \prod_{m=1}^{n} \kappa_m \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq 3}}^{n} a_\ell \\
&\vdots \\
\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{n} \kappa_m \cdot \mathcal{S} &= \prod_{m=1}^{n} \kappa_m \cdot \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq n}}^{n} a_\ell .
\end{aligned}$$

Sumando lado a lado todas las ecuaciones en este nuevo sistema se obtiene que

$$\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{n}\kappa_m+\prod_{\substack{m=1\\m\neq 2}}^{n}\kappa_m+\prod_{\substack{m=1\\m\neq 3}}^{n}\kappa_m+\cdots+\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{n}\kappa_m\right)\mathcal{S} \;=\; (n-1)\prod_{m=1}^{n}\kappa_m\cdot\mathcal{S}.$$

Puesto que estamos suponiendo que $\mathcal{S}\neq 0$, la igualdad previa se puede reescribir como

$$\prod_{\substack{m=1\\m\neq 1}}^{n}\kappa_m+\prod_{\substack{m=1\\m\neq 2}}^{n}\kappa_m+\prod_{\substack{m=1\\m\neq 3}}^{n}\kappa_m+\cdots+\prod_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{n}\kappa_m \;=\; (n-1)\prod_{m=1}^{n}\kappa_m$$

o bien como

$$\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}+\cdots+\frac{1}{\kappa_n}=n-1.$$

Dado que ninguno de los números enteros $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_n$ es igual a 1, entonces $\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}+\cdots+\frac{1}{\kappa_n}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$. De esto se desprende que $n-1\leq\frac{n}{2}$ y de aquí que $n\leq 2$ (**¡absurdo!**).

El absurdo obtenido nos permite afirmar que $a_1+a_2+\cdots+a_n=\mathcal{S}=0$ y la demostración termina.

□

Problema 2. Sean a y b números enteros positivos cuyo máximo común divisor es igual 1. Demuestre que, para cada número entero c, la recta $ax+by=c$ pasa por un punto de coordenadas enteras (X,Y) en el cual $0\leq Y\leq a-1$.

Solución. Como $\mathrm{mcd}(a,b)=1$, existen números enteros x_0 y y_0 tales que $ax_0+by_0=1$; si multiplicamos ambos lados de esta igualdad por c tenemos que $a(x_0c)+b(y_0c)=c$. Por el algoritmo de la división sabemos que existen números enteros t y r, únicos, tales que

$$y_0c=at+r \quad \text{y} \quad 0\leq r\leq a-1.$$

Si hacemos $X=x_0c+bt$ y $Y=y_0c-at$ tenemos que (X,Y) es un punto del plano de coordenadas enteras cuya ordenada $Y=y_0c-at$ pertenece al intervalo $[0,a-1]$; luego, en vista de que

$$\begin{aligned} aX+bY &= a(x_0c+bt)+b(y_0c-at)\\ &= a(x_0c)+b(y_0c)\\ &= c(ax_0+by_0)\\ &= c, \end{aligned}$$

se desprende que la recta de ecuación $ax+by=c$ pasa por (X,Y) y la demostración termina. □

Problema 3. Para cada número entero positivo n, sea $f(n)$ el número de enteros positivos con exactamente $2n$ cifras de las cuales n son iguales a 1 y n son iguales a 2. Sea $g(n)$ el número de enteros positivos de n cifras, todas ellas entre 1 y 4, inclusive, cuyo número de cifras iguales a 1 es igual a su número de cifras iguales a 2. Demuestre que $f(n) = g(n)$.

Solución. En primer lugar notamos que $f(n) = \binom{2n}{n}$ para cada número entero positivo n.

Por el algoritmo de la división de los números enteros, existen $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $r \in \{0, 1\}$, únicos, tales que $n = 2k + r$. Para analizar $g(n)$ determinamos en cuántos de los números de n cifras que se están considerando el número de 1's es igual a 0, luego determinamos el total de números de n cifras en los cuales el número de 1's es igual a 1 y, así sucesivamente, hasta que calculamos el total de números de n cifras en los cuales el números de 1's es igual a k. Resulta que:

$$\begin{aligned} g(n) &= 2^n + \binom{n}{2}\binom{2}{1}2^{n-2} + \binom{n}{4}\binom{4}{2}2^{n-4} + \cdots + \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{n-2k} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{2j}\binom{2j}{j}2^{n-2j} \end{aligned}$$

El problema se reduce a demostrar que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{2j}\binom{2j}{j}2^{n-2j} \tag{7}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Para tal fin consideramos el polinomio $p(x) = (1 + x)^{2n}$. Vamos a calcular el coeficiente del término de grado n en el desarrollo de ese polinomio. Puesto que $(1 + x)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^{2n-j}$ se tiene por un lado que el coeficiente buscado es igual a $\binom{2n}{n}$. Por otro lado, al ser

$$\begin{aligned} (1 + x)^{2n} &= (1 + 2x + x^2)^n \\ &= (2x + (1 + x^2))^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2x)^{n-j}(1 + x^2)^j, \end{aligned}$$

se sigue que el coeficiente en cuestión también es igual a

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{n-j}\mathfrak{c}_j$$

donde $\mathfrak{c}_j$ es el coeficiente de grado j en el desarrollo del binomio $(1 + x^2)^j$. Dado que $(1+x^2)^j = \sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell}x^{2\ell}$ entonces $j = 2m$ para algún $m \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ y, en consecuencia,

$\mathfrak{c}_j = \binom{j}{m}$. Así pues,

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} \mathfrak{c}_j \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{2m} \binom{2m}{m} 2^{n-2m} \end{aligned}$$

lo cual es justamente lo anunciado en (7).

□

Problema 4. Sean a, b y c números reales tales que

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= abc, \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) &= a^3b^3c^3. \end{aligned}$$

Demuestre que $abc = 0$.

Solución. Primero supongamos $a = b = c$, de la primera igualdad se obtiene que $8a^3 = a^3$ y, en consecuencia, $a = 0$, de manera que se obtiene la conclusión deseada.

Ahora supongamos que ninguno de los elementos del conjunto $\{a, b, c\}$ es igual a cero. En tal caso podemos hacer el cociente $a^3b^3c^3/abc$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 &= \frac{a^3b^3c^3}{abc} \\ &= \frac{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= (a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ac+a^2) \\ &= \left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right)\left(\left(\frac{b}{\sqrt{2}}-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}\right)\left(\left(\frac{c}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right) \\ &> \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{c^2+a^2}{2}\right) \\ &\geq \sqrt{a^2b^2}\sqrt{b^2c^2}\sqrt{c^2a^2} \\ &= \sqrt{a^4b^4c^4} \\ &= a^2b^2c^2, \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo. De esto se sigue $a = 0$, $b = 0$ ó $c = 0$; en cualquier caso se verifica que $abc = 0$.

□

Problema 5. Determine el valor de la suma

$$\sum_{k=2}^{1000} \left\lfloor \frac{1}{k-\varphi(k)} \right\rfloor$$

donde $\varphi(k)$ denota el número de enteros positivos menores o iguales a k que son coprimos con k.

Nota. Recuerde que si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ representa al mayor número entero que es menor o igual a x.

Solución de Henry J. Ricardo. De la definición de $\varphi(k)$ es claro que, para todo número entero $k \geq 2$, se cumple la desigualdad $\varphi(k) \leq k-1$; además, la igualdad se alcanza si y sólo si k es un número primo.

Así pues, si k es un número primo entonces $k - \varphi(k) = 1$ y, consecuentemente, $\left\lfloor \frac{1}{k-\varphi(k)} \right\rfloor = 1$. Si k es un número compuesto entonces $k - \varphi(k) \geq 2$ y, en consecuencia, $0 < \frac{1}{k-\varphi(k)} \leq \frac{1}{2}$, lo que conlleva a que $\left\lfloor \frac{1}{k-\varphi(k)} \right\rfloor = 0$. De todo esto se sigue que

$$\sum_{k=2}^{1000} \left\lfloor \frac{1}{k-\varphi(k)} \right\rfloor = \#\left\{k \in \mathbb{Z}^+ : \ k \leq 1000 \ \text{ y } \ k \ \text{ es primo}\right\},$$

donde la notación $\#\{a, b, c, \ldots\}$ indica el número de elementos del conjunto $\{a, b, c, \ldots\}$. Para obtener la respuesta final se aplica la criba de Erastóstenes para determinar los números primos del intervalo $[1, 1000]$; después de realizar el cribado se obtiene que hay 168 números primos en tal intervalo y ese es el valor de la suma en cuestión.

$\square$

Problema 6. Alicia escribe los números enteros del 1 al 2023 en el pizarrón. Repetidamente, borra dos números x y y y los reemplaza por $\sqrt{x+y}$. Alicia hace esto hasta que queda un solo número. Si M es el número más grande que puede quedar al final, demuestre que $M < \frac{91}{2}$.

Solución de José Luis Carballo Lucero. Sean a y b dos números tales que $2023 \geq a \geq b$. Puesto que $a + b \leq 2 \cdot 2023$ se sigue que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{4046} < 64 < 2023$. Se tiene así que, al aplicar la operación a dos números menores o iguales a 2023, el resultado es un número menor que 2023. Por lo tanto, después de 2019 *eliminaciones*, tendremos sólo cuatro números restantes $a_1, a_2, a_3, a_4 \leq 2023$. Sólo hay dos formas de aplicar la operación a estos 4 números para quedarnos con un solo número; el número que queda al final es

$$\sqrt{\sqrt{a_w + a_x} + \sqrt{a_y + a_z}} \quad \text{ó} \quad \sqrt{a_w + \sqrt{a_x + \sqrt{a_y + a_z}}}$$

donde $\{w, x, y, z\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Observamos que $a_w + \sqrt{a_x + a_y} < 2023 + 64 = 2087$ y, en consecuencia,

$$\sqrt{a_w + \sqrt{a_x + a_y}} < \sqrt{2087} < 46.$$

Así pues, para el número final hay dos posibilidades:

$$\sqrt{\sqrt{a_w + a_x} + \sqrt{a_y + a_z}} < \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$$

ó

$$\sqrt{a_w + \sqrt{a_x + \sqrt{a_y + a_z}}} < \sqrt{2023 + 46} = \sqrt{2069}.$$

Luego, dado que $\left(\frac{91}{2}\right)^2 = \frac{8281}{4} > 2070$, concluimos que cualquier número que quede al final tiene que ser menor que $\sqrt{2069} < \sqrt{\left(\frac{91}{2}\right)^2} = \frac{91}{2}$.

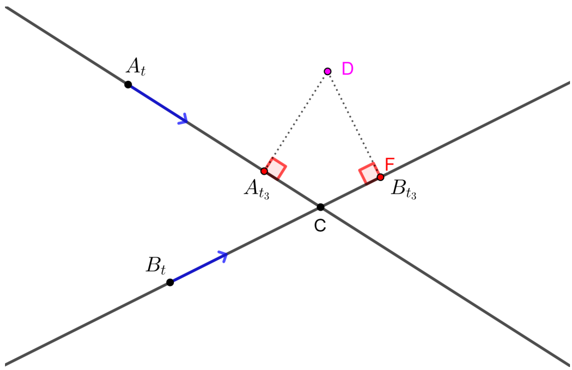
□

Problema 7. Dos carros A y B viajan a través de dos avenidas rectas a la misma velocidad. Sea C el punto de intersección de ambas avenidas. Suponga que ambos carros nunca chocan.

a) Demuestre que existe un punto D que equidista de ambos carros.

b) Demuestre que A, B, C y D son concíclicos.

Solución. Denotemos con A_t al punto del rayo $\overrightarrow{AC}$ en el que se encuentra el automóvil A al instante t y denotemos con B_t al punto del rayo $\overrightarrow{BC}$ en el que se encuentra el automóvil B al instante t. Supongamos que el automóvil A llega a C al instante t_1 mientras que B hace lo propio al instante t_2. Puesto que los carros no chocan entonces $t_1 \neq t_2$ y, además, $A_{t_1}C - B_{t_1}C = -B_{t_1}C < 0$ y $A_{t_2}C - B_{t_2}C = A_{t_2}C > 0$. De esto se desprende que existe un instante t_3 tal que $A_{t_3}C - B_{t_3}C = 0$. Luego, si levantamos la perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ por A_{t_3} y la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ por B_{t_3} y llamamos D al punto en el que tales perpendiculares se intersecan, los triángulos $CA_{t_3}D$ y $CB_{t_3}D$ resultan ser congruentes y de aquí que $DA_{t_3} = DB_{t_3}$. En el diagrama que se presenta a continuación se bosquejan los elementos principales del argumento anterior:



La solución del inciso b es una consecuencia directa del hecho de que la suma de las medidas de dos ángulos opuestos del cuadrilátero $A_{t_3}CB_{t_3}D$ es 180°.

□

Problema 8. Demuestre que hay una infinidad de números enteros positivos a, b y c tales que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ y los números

$$\frac{a^3 - b^3 - c^3}{3}, \frac{a^5 - b^5 - c^5}{5}, \frac{a^7 - b^7 - c^7}{7}$$

están en progresión geométrica en ese orden.

Solución. Sea $b \in \mathbb{Z}^+$. Haciendo $c = 1$ y $a = b + 1$ tenemos que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ y que

$$\begin{aligned}
\frac{a^3 - b^3 - c^3}{3} &= b(b + 1),\\
\frac{a^7 - b^7 - c^7}{7} &= b(b + 1)(b^4 + 2b^3 + 3b^2 + 2b + 1) = b(b + 1)(b^2 + b + 1)^2,\\
\frac{a^5 - b^5 - c^5}{5} &= b(b + 1)(b^2 + b + 1).
\end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que

$$\frac{a^3 - b^3 - c^3}{3} \cdot \frac{a^7 - b^7 - c^7}{7} = \left(\frac{a^5 - b^5 - c^5}{5}\right)^2,$$

lo que indica que los números $\frac{a^3-b^3-c^3}{3}$, $\frac{a^5-b^5-c^5}{5}$ y $\frac{a^7-b^7-c^7}{7}$ forman una progresión geométrica de término inicial $\frac{a^3-b^3-c^3}{3}$ y razón común $r = \frac{5(a^7-b^7-c^7)}{7(a^5-b^5-c^5)}$. Puesto que cada $b \in \mathbb{Z}^+$ da lugar a una tercia distinta del tipo $(a = b + 1, b, c = 1)$, el resultado se sigue.

□

Problema 9. Sea $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left| f(n) - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) n \right| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Demuestre que $f(f(n)) = f(n) + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución. Sea $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Observamos que $\varphi^2 = \varphi + 1$, por lo que $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$. Usando dos veces la condición del problema, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(f(n)) - \varphi f(n)| &< \frac{1}{\varphi}, \\ |f(n) - \varphi n| &< \frac{1}{\varphi}. \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda desigualdad por $\frac{1}{\varphi}$ y usando la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$|f(f(n)) - f(n) - n| = \left| f(f(n)) - \left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) f(n) - n \right| < \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1.$$

Como $f(f(n)) - f(n) - n$ es un número entero para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, concluimos que $f(f(n)) - f(n) - n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

$\square$

3.$^{\text{er}}$ Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El Concurso Nacional Femenil nace como una iniciativa temporal para promover la participación de estudiantes del género femenino en el Concurso Nacional "Mixto". Esta edición del concurso se realizó en la Ciudad de México del 10 al 15 de junio del presente año. Tuvo una participación de 171 alumnas concursantes, provenientes de 29 estados de la república mexicana.

La Olimpiada Femenil tiene dos niveles de participantes: a) Nivel 1: Estudiantes mujeres que se encuentren cursando hasta primer año de preparatoria al momento del concurso y no que no hayan cumplido 18 años al 1 de agosto de 2024; b) Nivel 2: Estudiantes mujeres que se encuentren cursando hasta tercer año de preparatoria al momento del concurso y que no hayan cumplido 20 años al 1 de agosto de 2024, además no pueden contar con 2 participaciones en el nivel 2 del Concurso Nacional Femenil ni en la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los dos niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes de 3 problemas cada uno, presentados en los días 11 y 12 de junio, y cuentan 4.5 horas cada día para redactar las soluciones de dichos problemas.

Hubo una participación de 84 alumnas en nivel 1 y 87 alumnas en nivel 2.

Las concursantes ganadoras de medalla de oro en el nivel 1, quienes además fueron preseleccionadas para participar en la Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (PAGMO) en el mes de noviembre en la ciudad de Durango, Durango, fueron:

Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos)
Dana Karen Medina González (Yucatán)
Elisa María Villarreal Corona (Ciudad de México)

Sofía Constanza Santisteban Dávila (Quintana Roo)
Ana Isolde Henney Arthur (Michoacán)
Elena Elizabeth Ramos Hernandez (Oaxaca)

Las concursantes ganadoras de medalla de oro en el nivel 2 fueron:

Perla Vivian Cabrera Contreras (San Luis Potosí)
Isabela Loredo Carvajal (Tamaulipas)
Alejandra Muñoz Espín (Morelos)
Jimena Sofía Díaz Sánchez (Zacatecas)
Salma Sydykov Méndez (Ciudad de México)
Valeria Yhelenna Oviedo Valle (Morelos)
Brenda Camila Trejo Rodríguez (Morelos)
Sofía Velázquez Velázquez (Estado de México)

Examen individual

En la siguiente lista de problemas, los problemas 1, 2 y 3 conformaron el primer examen del nivel 1 mientras que los problemas 5, 6 y 7 fueron los que se asignaron al segundo examen de ese nivel. Los problemas 2, 3 y 4 son los que aparecieron en el primer examen del nivel 2 y los problemas 6, 7 y 8 son los que conformaron el examen del segundo día.

Problema 1. Sea x un número real. Determina la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2+1}{1}+\frac{x^2+2}{2}+\frac{x^2+3}{3}+\ldots\frac{x^2+2024}{2024}=2024$$

Problema 2. Se tienen 50 papelitos con los números del 1 al 50. Se quieren tomar 3 papelitos de manera que a cualquiera de los tres números, dividido entre el máximo común divisor de los otros dos, se le pueda sacar la raíz cuadrada tal que quede un número racional.
¿Cuántas tercias (no ordenadas) de papelitos cumplen con esta condición?
Nota: Un número es racional si puede escribirse como la división de 2 enteros.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y D el pie de altura desde A. Sea M un punto tal que $MB = MC$. Sean E y F las intersecciones del circuncírculo de BMD y CMD con AD. Sean G y H las intersecciones de MB y MC con AD. Demuestra que $EG = FH$.

Problema 4. Hay 6 cuadrados en una fila. Cada uno se etiqueta con el nombre de Ana o Beto y con un número del 1 al 6, usando cada número sin repetir. Ana y Beto juegan a

pintar cada cuadrado siguiendo el orden de los números en las etiquetas. Quien pinte el cuadrado será la persona cuyo nombre esté en la etiqueta. Al pintarlo, la persona podrá elegir si pintar el cuadrado de rojo o de azul. Beto gana si al final hay la misma cantidad de cuadrados azules como rojos, y Ana gana en caso contrario. ¿En cuántas de todas las posibles maneras de etiquetar los cuadrados puede Beto asegurar su victoria?
El siguiente es un ejemplo de una asignación de etiquetas.

Ana	1	Beto	3	Ana	5	Beto	2	Ana	4	Beto	6

Primero Ana pinta el primer cuadrado, luego Beto pinta el cuarto cuadrado, luego Beto pinta el segundo cuadrado, y así sucesivamente.

Problema 5. Se tiene el triángulo acutángulo ABC. La base BC mide 40 unidades. Sea H el ortocentro de ABC y O su circuncentro. Sean D el pie de altura desde A y E el pie de altura desde B. El punto D parte al lado BC en razón de 3 a 5, con BD menor a DC. Si la mediatriz de AC pasa por el punto D, calcula el área del cuadrilátero $DHEO$.
Nota: El ortocentro es el punto donde se intersecan las tres alturas de un triángulo.

Problema 6. Se colorea cada casilla de un tablero de 4×4 de negro o blanco de tal manera que cada fila y cada columna tiene una cantidad par de casillas negras. ¿De cuántas maneras se puede colorear el tablero?

Problema 7. Considere a la ecuación cuadrática $x^2+a_0x+b_0$ para algunos reales (a_0, b_0). Repetimos el siguiente procedimiento tantas veces como sea posible:
Sea $c_i = \min\{r_i, s_i\}$, con r_i, s_i las raíces de la ecuación $x^2 + a_ix + b_i$. Se escribe la nueva ecuación $x^2+b_ix+c_i$. Es decir, que para la siguiente iteración del procedimiento, $a_{i+1} = b_i$, y $b_{i+1} = c_i$.
Decimos que (a_0, b_0) es una pareja *interesante* si, después de un número finito de pasos, la ecuación que obtenemos después de un paso es la misma, de manera que $(a_i, b_i) = (a_{i+1}, b_{i+1})$. Encuentre todas las parejas interesantes.

Problema 8. Encuentra todos los enteros positivos n tales que entre los n números

$$2n+1,\ \ 2^2n+1,\ \ldots\ ,\ \ 2^nn+1$$

hay $n, n-1$ o $n-2$ primos.

Soluciones a los problemas del examen individual.

Solución 1. Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{1}+\frac{x^2+2}{2}+\ldots\frac{x^2+2024}{2024}&=(x^2+1)+\left(\frac{x^2}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{x^2}{2024}+1\right)\\&=x^2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2024}\right)+2024\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2024}\right)+2024=2024\\ \Rightarrow x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2024}\right)=0\\ \Rightarrow x^2=0\\ \Rightarrow x=0\end{aligned}$$

□

Solución 2. Primero revisamos lo que pasa si los números de los papelitos son cuadrados perfectos.

Si son primos relativos todos, su MCD será de 1 y la división quedará únicamente el número al cuadrado y servirá, por ejemplo 2^2, 3^2, 5^2.

Por otro lado, si no son primos relativos, su MCD será también un cuadrado perfecto, porque todos sus divisores comunes están en parejas. Por ejemplo: 2^2, 4^2, 6^2. El MCD de 4^2 y 6^2 es 2^2. Por lo tanto, al dividir el cuadrado perfecto entre otro cuadrado perfecto, seguirá siendo racional la raíz. De modo que en este caso podemos tomar cualquier tercia entre 1 y 7 como bases. Eso se puede hacer de $7!/(4!3!) = 35$ formas.

Ahora, si el número que se va a dividir no tiene todos sus factores en parejas, el denominador deberá tener esos factores también, para que se dividan y se pueda sacar la raíz. Y como eso tiene que pasar para cualquier número de la tercia, los tres deben ser múltiplos de lo mismo (dos para que su MCD tenga a ese factor y otro para que se divida antes de sacar la raíz).

Para contarlos, cada una de las tercias anteriores se puede multiplicar por diferente número de factores. El límite lo pone el cuadrado mayor. Por ejemplo, el 7^2 ni el 6^2 no se pueden multiplicar ya por nada.

- 5^2 se puede dividir máximo por 2.

- 4^2 se puede dividir máximo por 3.
- 3^2 se puede dividir máximo por 5.

El 1^2 y el 2^2 no pueden ser los mayores de ninguna tercia.

Si se multiplican por 1, obtendríamos las tercias del principio. Entonces contaremos los factores desde el 1 y ya no sumaremos los del primer caso.

Si el mayor es el cuadrado de 7, hay que elegir 2 de los 6 restantes: $6!/(2!4!) = 15$.

Si el mayor es 6, hay: $5!/(2!3!) = 10$. Con 5, hay $4!/(2!2!)$ cada uno por 1 o por 2, por lo que tenemos 12.

Con 4, hay $3!/2!$ cada uno por 1, 2 o 3, Por lo tanto hay 9.

Con 3, hay una tercia, multiplicada por cualquier factor del 1 al 5. Notemos que aquí sucede que al multiplicar por 4 se hace la tercia 4, 16, 36 que ya estaba contada en los de 6^2. Así que en este caso quedan 4 tercias.

En total obtenemos $15 + 10 + 12 + 9 + 4 = 50$ tercias posibles. $\square$

Solución 3. Basta con demostrar que $MG = MH$ y $ME = MF$, si esto es cierto, $EG = FH$ por distancias desde congruencias de triángulos desde M. Notemos que si $\angle MEA = \angle MFA$ demostramos que $ME = MF$ isósceles. Moviendo ángulos obtenemos que $\angle MEA = \angle MBD = \angle MCD = \angle MFA$ por cíclicos y por el isósceles MBC. Entonces $ME = MF$, y de manera similar, basta con demostrar que $\angle MGA = \angle MHA$ para ver que $MG = MH$ por isósceles. Esto es cierto porque $\angle MGA = 90 - \angle MCD = 90 - \angle MBD = \angle MHA$ por el mismo isósceles MBC y por la altura AD. Entonces $MH = MG$, demostrándonos el problema. $\square$

Solución alternativa. Por ángulos entre cíclicos, se cumple $\angle MEA = \angle MBC$. Como $MC = MB$, se tiene $\angle MBC = \angle BCM$. De manera similar, $\angle BCM = \angle MFE$. Así que $MF = ME$

Sea $\angle EMH = \alpha$. Por ángulos entre cíclicos, $\angle EMB = 90$, así que $\angle HMB = 90 - \alpha$. Por ángulo entre cíclicos $\angle HMF = 90$, por lo tanto $\angle GMF = \alpha$. Por congruencia de triángulos $\triangle MGF \cong \triangle MHE$. Por lo tanto $EH = FG$ y se concluye el problema. $\square$

Solución 4. Para cada una de las 6! maneras de etiquetar los números hay 2^6 maneras de etiquetar los nombres. En cada una de las 6! podemos sólo fijarnos en el orden de los turnos y olvidar los números.

Importando sólo el orden, se resuelve como sigue.
Pensamos a los azules como $+1$ y a los rojos como -1. Así, Beto quiere que los colores sumen cero. Escribimos la sucesión de turnos como

$$T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6) \equiv T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6$$

con $T_i \in \{A, B\}$, los colores como

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

con $C_i \in \{+1, -1\}$ y definimos

$$\mathscr{B} := \{T : \text{Beto puede asegurar la victoria}\}.$$

Si Ana es la última, entonces ganará porque tiene 2 opciones y alguna no da cero. Entonces si Beto puede asegurar su victoria, la sucesión de turnos debe tener $T_6 = B$. Pensemos ahora que $T_4 = T_5 = A$ y, sin pérdida de generalidad, $C_1 + C_2 + C_3 > 0$ (no puede ser cero por paridad). Si Ana elige $C_4 = C_5 = +1$, entonces $C_1 + \cdots + C_5 > 2$ y es imposible para Beto asegurar su victoria. Esto significa que si $T \in \mathscr{B}$, entonces debe ser de la forma $X_1X_2X_3BBB$, $X_1X_2X_3ABB$ o $X_1X_2X_3BAB$.

1. Caso $X_1X_2X_3BBB$.

   Como $C_1+C_2+C_3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ y Beto elige el valor de $C_4+C_5+C_6 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, Beto puede asegurar su victoria.

   Hay un total de 2^3 elementos de $\mathscr{B}$ que caen en este caso.

2. Caso $X_1X_2X_3ABB$.

   Beto elige $C_5 + C_6 \in \{-2, 0, 2\}$. Entonces Beto gana si puede asegurar que $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \in \{-2, 0, 2\}$. Como Ana elige C_4, sólo puede asegurar esto si $C_1 + C_2 + C_3 = \pm 1$. Esto equivale a asegurar que C_1, C_2, C_3 no son todos iguales. Beto puede asegurar esto exactamente cuando al menos unos de T_2 y T_3 es B, i.e. todos excepto cuando $T_2 = T_3 = A$.

   Hay un total de $2^3 - 2$ elementos de $\mathscr{B}$ que caen en este caso.

3. Caso $X_1X_2X_3BAB$.

   Beto necesita asegurar $C_1 + \cdots + C_4 = 0$, de lo contrario Ana puede hacer que $C_1 + \cdots + C_5 \neq \pm 1$. Como Beto elige C_4, esto equivale a asegurar que $C_1 + C_2 + C_3 = \pm 1$, como en el caso anterior.

Hay un total de $2^3 - 2$ elementos de $\mathscr{B}$ que caen en este caso.

Haciendo la suma, obtenemos que de los 2^6 etiquetados posibles para un orden de números dado, en un total de

$$2^3 + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 20$$

Beto puede asegurar su victoria para cada orden.
Por lo tanto, hay $20 \cdot 6!$ etiquetados en los que Beto puede asegurar la victoria.

$\square$

Solución 5. Usando la medida de BC y la razón en que queda dividida, $BD = 15$ y $DC = 25$.

Si M es el punto medio de AC, MD es mediatriz sólo si ADC es isósceles, pues MD sería su altura y mediatriz. Además ADC es rectángulo en D, por ser pie de altura. Por lo tanto, $AD = 25$ y el ángulo $ACD = 45^\circ$.

El triángulo BEC tiene un ángulo de 45° y otro de 90°, por lo que también es rectángulo isósceles y el ángulo $\angle EBC = 45^\circ$. Esto hace que E esté en la mediatriz del lado BC, al igual que O, así que la línea EO es perpendicular a BC y pasa por el punto medio de BC, al cual llamaremos N.

Ya que BE y DM son perpendiculares a AC, entre ellas son paralelas, al igual que AD y EN, por lo que el cuadrilátero $DHEO$ es un paralelogramo y puedo calcular su área multiplicando su base DH por su altura DN.

El triángulo BHD también es rectángulo isósceles, $HD = BD = 15$. Entonces:

- $BN = \frac{BC}{2} = 20$
- $DN = BN - BD = 20 - 15 = 5$

Por lo tanto, el área del paralelogramo buscado es $5 \times 15 = 75$ unidades cuadradas.

$\square$

Solución alternativa. Notamos que $\triangle ADC$ isósceles pues DN es altura y mediatriz. Como $\angle CDA = 90$, entonces $\angle DCA = \angle DAC = 45$, esto implica que $\angle CDN = 45$. En consecuencia, $\triangle MDO$ es isósceles por tener ángulos $90, 45$, por lo que $OM = 5$.

Usando Pitágoras en $\triangle OMC$ obtenemos $OC = 5\sqrt{17}$. Luego, por Pitágoras en $\triangle CND$ tenemos que $CN = \frac{25}{\sqrt{2}}$. Nuevamente por Pitágoras en $\triangle CON$ resulta $ON = \frac{15}{\sqrt{2}}$.

Obtenemos que $NE = \frac{15}{\sqrt{2}}$:

- Usando $ND \| BE$ y Tales en CB y CE, con esas paralelas
- Usando $\triangle CMN \sim \triangle CBE$

Calculamos $(\triangle ONE) = \frac{ON \dot{N} E}{2} = \frac{225}{4}$. Luego, vemos que $\triangle AHE$ isósceles, por lo que $HE = 5\sqrt{2}$ y

$$(\triangle AHE) = 25,$$
$$(\triangle NDA) = \frac{ND \dot{N} A}{2} = \frac{625}{4}$$
$$(DHEO) = \frac{625}{4} - \frac{225}{4} - 25 = 75.$$

□

Solución 6. Establecemos coordenadas para las casillas del tablero, desde $(1, 1)$ hasta $(4, 4)$. Decimos que una coloración del tablero es válida si cumple con las condiciones del problema. Consideramos el subtablero de 3×3 que va desde $(1, 1)$ hasta $(3, 3)$. Probaremos que cualquier coloración del subtablero define una única coloración válida para todo el tablero.

Definimos c_{ij} como 0 si el color de (i, j) es blanco, y 1 si es negro. En un tablero válido, tenemos las siguientes ecuaciones módulo 2:

$$\begin{aligned}
c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} &= 0 & \qquad c_{11} + c_{21} + c_{31} + c_{41} &= 0\\
c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} &= 0 & \qquad c_{12} + c_{22} + c_{32} + c_{42} &= 0\\
c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{34} &= 0 & \qquad c_{13} + c_{23} + c_{33} + c_{43} &= 0\\
c_{41} + c_{42} + c_{43} + c_{44} &= 0 & \qquad c_{14} + c_{24} + c_{34} + c_{44} &= 0
\end{aligned}$$

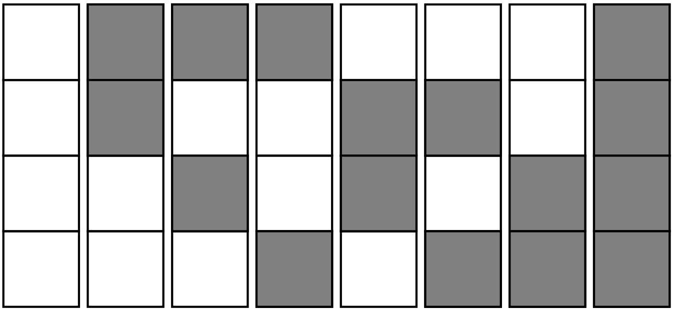
Podemos despejar $c_{14}, c_{41}, c_{24}, c_{42}, c_{34}, c_{43}$ a partir de cada una de las primeras seis ecuaciones, en términos de los colores del subtablero. Cualquiera de las últimas dos ecuaciones nos permite despejar c_{44}. Conversamente, este sistema de ecuaciones tiene una solución módulo 2 dada por

$$\begin{aligned}
c_{14} &= c_{11} + c_{12} + c_{13} & \qquad c_{41} &= c_{11} + c_{21} + c_{31}\\
c_{24} &= c_{21} + c_{22} + c_{23} & \qquad c_{42} &= c_{12} + c_{22} + c_{32}\\
c_{34} &= c_{31} + c_{32} + c_{33} & \qquad c_{43} &= c_{13} + c_{23} + c_{33}
\end{aligned}$$
$$c_{44} = c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{31} + c_{32} + c_{33}$$

Es decir, los colores de las nueve casillas del subtablero determinan todos las demás en una coloración válida, por lo que hay $2^9 = 512$ de estas coloraciones. □

Solución alternativa.

Considerar las 8 posibilidades para cada columna.

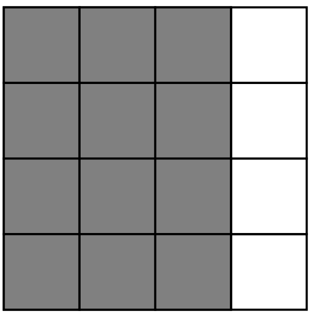


Para las primeras tres columnas se puede elegir cualquiera de las 8 posibilidades lo que nos deja un tablero fijo de 4×3. La última columna se determina por la paridad de la suma de la fila en la que está, es decir, al igual que en la solucion anterior, una vez definidos los colores de las tres primeras casillas de una fila, la cuarta está determinada pues debe cumplir con la paridad.

Y se puede demostrar que la última columna también cumple con la paridad pues:

- La suma de todo el tablero es par (cada fila tiene una suma par).
- La suma de las primeras tres columnas es par (cada columna tiene una suma par).
- Por lo tanto, la suma de la cuarta columna también debe ser par.

Por lo tanto hay un total de $8^3 = \boxed{512}$ tableros válidos.



□

Solución 7. Consideremos que hemos comenzado el proceso con una pareja interesante (a_0, b_0), y que después de una cantidad finita de pasos hemos llegado al cíclo en algún $i = k$, de modo que:

$$x^2 + a_k x + b_k = x^2 + b_k x + c_k = 0.$$

De donde $a_k = b_k$ y en particular $b_k = a_k = c_k$, de modo que la ecuación ciclada tiene la forma:

$$x^2 + a_k x + a_k = 0.$$

y la menor raíz es a_k, por lo que debe cumplirse que:

$$(a_k)^2 + a_k (a_k) + a_k = 0.$$

$$\implies a_k^2 + a_k^2 + a_k = 0 \implies 2a_k^2 + a_k = 0 \implies a_k (2a_k + 1) = 0.$$

Por lo que las únicas ecuaciones con las que se llega a un cíclo son:

$$a_k = 0 \implies \boxed{x^2 = 0}. \tag{8}$$

$$a_k = -\frac{1}{2} \implies \boxed{x^2 - x/2 - 1/2 = 0}. \tag{9}$$

Corroboramos que el caso (9) tiene por raíces $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, por lo que sí obtenemos el cíclo deseado.

Ahora bien, debemos analizar cada caso para ver a partir de cuales valores iniciales (a_0, b_0) podemos alcanzar alguna de estas ecuaciones. Para ambos análisis será necesario verificar la primera vez en la que se presenta la raíz a_k dos veces consecutivas, pues con esto garantizamos que ambos coeficientes a_i, b_i serán iguales a a_k.

Caso 1. Supongamos que llegamos a la primer ecuación cuya menor raíz es 0 de las dos necesarias para caer en el cíclo. Entonces la ecuación expresada a partir de sus raíces:

$$(x - 0)(x - r) = x^2 + (-r)x + (0) = 0.$$

Y como el término constante es 0 entonces la raíz previa fue 0, contradiciendo la propuesta (estaríamos viendo al segundo 0 y no al primero), por lo que estamos al inicio del proceso, y en particular $b_0 = 0$. Note además que para que la raíz tomada fuera el 0 necesitamos que $r \geq 0$.

Finalmente, al aplicar el paso sobre $x^2 + (-r)\,x + (0) = 0$ obtenemos $x^2 = 0$, que es una de las ecuaciones que identificamos que se forman el cíclo. Por lo tanto las parejas $(a, 0)$ con $a \leq 0$ son interesantes.

Caso 2. Supongamos que llegamos a la primer ecuación cuya menor raíz es $-\frac{1}{2}$ de las dos necesarias para caer en el cíclo. Entonces la ecuación expresada a partir de sus raíces es:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - r) = x^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right) x - \left(\frac{r}{2}\right) = 0.$$

Note para que la raíz tomada fuera el $-\frac{1}{2}$ necesitamos que $r \geq -\frac{1}{2}$. La siguiente ecuación se obtiene aplicando un paso:

$$x^2 - \left(\frac{r}{2}\right) x - \frac{1}{2} = 0.$$

la cual debe de tener como raíz $-\frac{1}{2}$ por construcción. Sustituyendo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{r}{2}\right) = 0 \implies \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r = 0 \implies \boxed{r = 1}.$$

Y sustituyendo en la primer ecuación de este caso:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) x - \left(\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

La anterior es la ecuación que identificamos que forma al cíclo, por lo que la única forma de llegar a ella es si comenzamos de ella, de modo que sus coeficientes $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ forman una pareja interesante.

Habiendo analizado ambos casos, concluimos que el conjunto de todas las parejas interesantes es

$$S = \{(a, 0)\,;\, a \leq 0\} \cup \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

□

Solución 8. Sea S la sucesión

$$2n + 1,\ \ 2^2 n + 1,\ \ldots,\ \ 2^n n + 1.$$

Notemos que $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ cumplen la condición, pues $\{3\}$, $\{5\}$ y $\{7, 13\}$ son conjuntos de primos.

Asumamos que existe algún otro entero positivo n que cumple la condición. Supongamos que existen divisores primos impares p y q de $n+1$ y $n+2$, respectivamente. Tendremos por el teorema de Fermat:

$$2^{2(p-1)}n+1 \equiv 2^{p-1}n+1 \equiv n+1 \equiv 0 \pmod{p}$$

y de manera similar

$$2^{2q-3}n+1 = \underbrace{2^{q-1}\cdot 2^{q-2}n+1 \equiv 2^{q-2}n+1}_{\text{Fermat}} \equiv 2^{q-2}\cdot(-2)+1 \equiv \underbrace{-2^{q-1}+1 \equiv 0 \pmod{q}}_{\text{Fermat}}.$$

Notemos además que $2^{2(p-1)}n+1$, $2^{p-1}n+1$, $2^{2q-3}n+1$ y $2^{q-2}n+1$ son números compuestos, pues son múltiplos de p y q pero claramente mayores a $n+1 \geq p$ y $n+2 \geq q$, respectivamente.

Si n es par, entonces q no solo divide a $n+2$, si no también a $\dfrac{n+2}{2}$ ya que es impar.

Entonces tendremos $q \leq \dfrac{n+2}{2} \Rightarrow 2q-3 \leq n-1$. Como p divide a $n+1$, $p \leq n+1 \Rightarrow p-1 \leq n$ y entonces la sucesión S incluye a los números $2^{2q-3}n+1$, $2^{q-2}n+1$ y $2^{p-1}n+1$. $p-1 = 2q-3$ lo que implica $p = 2(q-1)$ y $p-1 = q-2$ así que $p = q-1$, de donde se concluye que p es par, lo cual es imposible. Entonces estos tres números son elementos distintos de S, y S tendrá máximo $n-3$ números primos, contradicción.

Si n es impar, entonces p no solo divide a $n+1$, si no también a $\dfrac{n+1}{2}$ ya que es impar.

Entonces tendremos $p \leq \dfrac{n+1}{2} \Rightarrow 2(p-1) \leq n-1$. Como q divide a $n+2$, $q \leq n+2 \Rightarrow q-2 \leq n$ y entonces la secuencia S incluye a los números $2^{2(p-1)}n+1$, $2^{p-1}n+1$ y $2^{q-2}n+1$. Ya habíamos visto que $p-1 \neq q-2$ y $2(p-1) = q-2 \Rightarrow 2p = q$ pero q es impar, lo cual también es imposible. Entonces estos tres números son elementos distintos de S, y S tendrá máximo $n-3$ números primos, contradicción.

Por lo tanto, nuestra suposición original es incorrecta, y alguno de p o q no existe, lo cual implica que alguno de $n+1$ o $n+2$ es una potencia de 2.

Caso 1: $n+1 = 2^k$.

Notemos que, para un entero positivo a,

$$2^{a(k+1)+1}n+1 = (2^{k+1})^a \cdot 2n+1 = (2n+2)^a \cdot 2n+1 \equiv (1)^a \cdot 2n+1 \equiv 0 \pmod{2n+1}$$

y entonces $2^{a(k+1)+1}n+1$ es compuesto, pues es mayor a $2n+1$. Entonces $2^{a(k+1)+1}n+1$ para $a = 1, 2, 3$ no pueden estar todos dentro de S, pues entonces habría 3 números compuestos dentro de S. Esto implica que para $a = 3$, $a(k+1)+1 > n$ para que esté fuera de S, lo cual implica

$$3(k+1) \geq n = 2^k - 1 \tag{10}$$

Si $k \geq 5$,

$$3k+3 = 3(k+1) \geq 2^k - 1 = (1+1)^k - 1 = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} - 1$$

$$\geq \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \binom{k}{4} + \binom{k}{5} - 1 \geq \binom{5}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - 1$$

$$= k + \frac{k(k-1)}{2} + 16 = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 16$$

$$\Rightarrow 0 \geq \frac{k^2}{2} - \frac{5k}{2} + 13 = \frac{k(k-5)}{2} + 13 \geq 0 + 13$$

lo cual es evidentemente falso. Entonces $k \leq 4$, y los posibles valores de n serían

$$n = 2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1 = 1, 3, 7, 15$$

que se reducen a $n = 7, 15$ pues $n > 3$.

Pero $\{2 \cdot 7 + 1, 2^3 \cdot 7 + 1, 2^5 \cdot 7 + 1\} = \{15, 57, 225\}$ es un conjunto de tres números compuestos, por lo que $n \neq 7$ y entonces $n = 15$.

Como $3(4+1) = 2^4 - 1$, la desigualdad (1) implica que los únicos números compuestos en la secuencia $S(15)$ son $2^{(4+1)+1} \cdot 15 + 1 = 2^6 \cdot 15 + 1$ y $2^{2(4+1)+1} \cdot 15 + 1 = 2^{11} \cdot 15 + 1$. Pero $2^3 \cdot 15 + 1 = 121 = 11^2$, por lo que $n \neq 13$ y este caso no da nuevos valores de n.

Caso 2: $n + 2 = 2^k$.

Notemos que, para un entero positivo a,

$$2^{ak}n + 1 = (2^k)^a n + 1 = (n+2)^a n + 1 \equiv (1)^a n + 1 \equiv 0 \pmod{n+1}$$

y entonces $2^{ak}n+1$ es compuesto, pues es mayor a $n+1$. Entonces $2^{ak}n+1$ para $a = 1, 2, 3$ no pueden estar todos dentro de S, pues entonces habría 3 números compuestos dentro de S. Esto implica que para $a = 3$, $ak > n$ para que esté fuera de S, lo cual implica

$$3k \geq n + 1 = 2^k - 1$$

Si $k \geq 5$, esto implica $3k + 3 > 2^k - 1$ lo cual ya habíamos visto que es falso, por lo que $k \leq 4$.

Si $k = 4$, $12 = 3 \cdot 4 \geq 2^4 - 1 = 15$ lo cual también es falso, así que $k \leq 3$.

Los posibles valores de n son entonces

$$n = 2^1 - 2, 2^2 - 2, 2^3 - 2 = 0, 2, 6$$

que se reducen a $n = 6$.

Pero $\{2^2 \cdot 6 + 1, 2^3 \cdot 6 + 1, 2^6 \cdot 6 + 1\} = \{25, 49, 385\}$ es un conjunto de tres números compuestos, por lo que $n \neq 6$.

Concluimos que no hay nuevos números que cumplan la condición, por lo que las únicas respuestas son $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. $\square$

8. º Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

Del 19 al 22 de septiembre de 2024 se llevó a cabo de manera presencial en la ciudad de Oaxtepec, Morelos, el Concurso Nacional de la 8a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron un total de 252 estudiantes, 87 de nivel I, 87 de nivel II y 78 de nivel III, representando a 30 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de quinto y sexto año de primaria.
b) Nivel II: Estudiantes de primer y segundo año de secundaria.
c) Nivel III: Estudiantes de tercer año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta numérica que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual donde podrán escribir sus soluciones. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Ganadores 8° Concurso Nacional de la OMMEB Nivel I

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro y plata en las pruebas individual y por equipos, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2025.

Los alumnos ganadores de **medalla de plata** en la prueba individual del Nivel I son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Liam Gael Farah Frías (Baja California Sur)
Alessandra Galván Franco (Hidalgo)
Yareth Vicente Salcedo Álvarez (Estado de México)
Carlos Aguilar Santos (Michoacán)
Derek Arturo Uribe García (Morelos)
Jared Alejandro Moguel Maldonado (Oaxaca)
Camila Ugalde Reséndiz (Querétaro)
Rodrigo Rodríguez Morelos (San Luis Potosí)
Alexis Robledo González (Coahuila)
Joaquín Rafael Servin Sandoval (Guanajuato)
Briana Melchor Valdez (Guerrero)
Aldair Lucas Martínez (San Luis Potosí)
Karen Renata Canché Uc (Yucatán)

Los alumnos ganadores de **medalla de oro** en la prueba individual del Nivel I del 8.º Concurso Nacional de la OMMEB son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Miroslav Rybin Nikiforchina (Chiapas)
Fabio Brancaccio Almaraz (Colima)
Ulrich Sebastian González López (Nuevo León)
Javier Emmanuel García González (Jalisco)
Nicolás Valdez Lomeli (Jalisco)
Jesús Gadiel Pintor Sánchez (Querétaro)

El equipo ganador de **medalla de plata** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Chiapas** conformado por:

Alexis Ismerio Ruiz
Iker Rodrigo Hernández Lara
Miroslav Rybin Nikiforchina

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Coahuila** conformado por:

Alexis Robledo González
Diego Sebastián Pinal López
Miguel Ángel Hernández Delgado

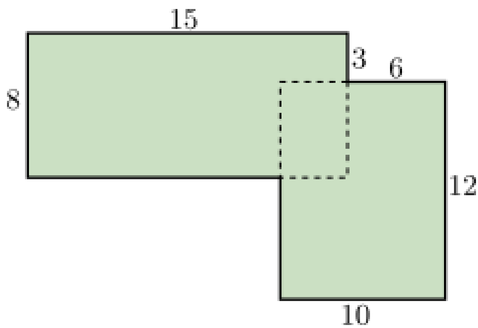
Aunque la prueba se divida en dos partes, adicionalmente se entrega el premio de Campeón de Campeones, que se otorga al equipo cuya suma de los puntajes individuales de sus concursantes además del puntaje en la prueba por equipos sea la más alta. En esta ocasión el equipo nombrado como **Campeón de Campeones** en Nivel I fue el estado de **Jalisco** conformado por:

Javier Emmanuel García González
Juan Pablo López Vargas
Nicolás Valdez Lomeli

En este número presentaremos los problemas y las soluciones de la prueba individual y por equipos de Nivel I y en números posteriores publicaremos las pruebas de los otros niveles.

Prueba individual, Nivel I

Problema 1. La figura está formada por 2 rectángulos sobrepuestos. En algunos segmentos de la orilla se ha puesto su medida en centímetros. Determina cuántos centímetros cuadrados tiene de área sombreada de la figura.



Problema 2. En el pizarrón, Juan escribe cuatro enteros positivos distintos, todos de una sola cifra. Al multiplicarlos el resultado es 60. ¿Cuánto es lo máximo que puede valer la suma de sus cuatro números?

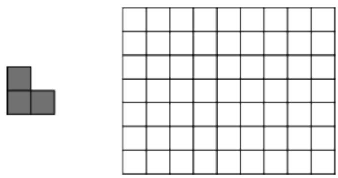
Problema 3. Nayeli sabe que $111 \times 11111 = 1\ 233\ 321$. ¿Cuánto es 444×55555?

Problema 4. La mosca Flynn se encuentra parada en el número 1 de un reloj. Cada minuto, la mosca se fija en el número en el que está, y se mueve tantos números en sentido de las manecillas del reloj como ese número indique. Por ejemplo, si Flynn estuviera parada en el 3, se movería al 6. ¿Sobre que número estará parada Flynn después de 2 horas?

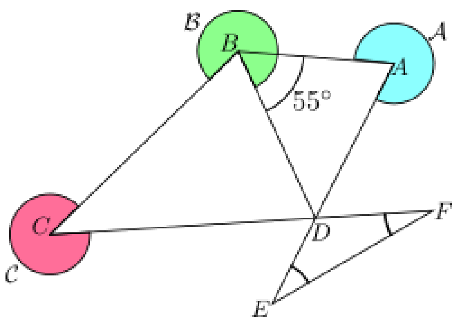
Problema 5. Decimos que xyz es el número formado por los dígitos x, y y z (por ejemplo, en el número 485 se tiene que $x = 4$, $y = 8$ y $z = 5$). Calcula el valor de $a + b + x$ si se cumple que

$$x1x + x2x + x3x + x4x + \cdots + x9x = aab2.$$

Problema 6. A la izquierda en la figura de abajo aparece una figura sombreada que consta de tres cuadritos. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar esa figura en la cuadrícula de 7×9 que se muestra a la derecha? (Nota: La figura de tres cuadritos puede estar girada).



Problema 7. La figura está formada por triángulos y círculos sombreados incompletos, como se muestra; C, D y F están sobre una misma línea recta y también A, D y E. Al círculo A le falta $1/6$ de área para estar completo, al círculo B le falta $1/5$ de área para estar completo y al círculo C le falta $1/9$ de área para estar completo. Encontrar la suma en grados de los ángulos marcados en E y F si $\angle DBA = 55°$.



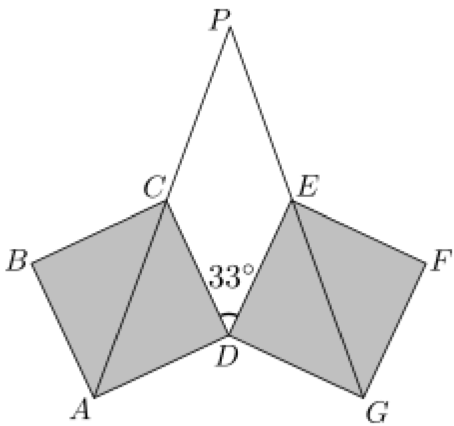
Problema 8. Abigaíl salió a cenar por su cumpleaños con 6 de sus amigas. Inicialmente habían dividido la cuenta entre 7 personas en partes iguales, pero luego decidieron que Abigaíl no pagara ya que era su cumpleaños. Entonces dividieron la cuenta entre 6 personas en partes iguales y, por esto, cada amiga terminó pagando 37 pesos más. ¿De cuántos pesos había sido originalmente la cuenta?

Problema 9. Tengo muchos palitos del mismo tamaño, pero de tres colores distintos. Los usaré para ponerle un marco pentagonal a mi foto. El único requisito es que no queden dos palitos del mismo color juntos. ¿De cuántas formas distintas lo puedo hacer?

.

Problema 10. Dos perritos corren en una pista recta. Ambos salen de la línea de salida al mismo tiempo, pero uno de los perritos corre el doble de rápido que el otro. El perrito más lento recorre la pista de ida y vuelta 3 veces. ¿Cuántas veces se encuentran los perritos en su recorrido (sin contar cuando ambos salen de la línea de salida)?

Problema 11. En la figura, los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ tienen lados de la misma medida. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y EG. Si $\angle CDE = 33°$, calcula la medida, en grados, de $\angle APG$.

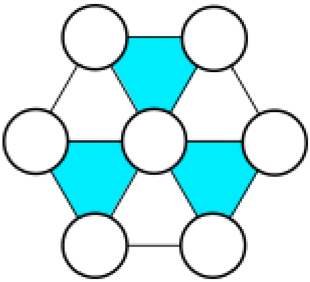


Problema 12. En una lista de enteros positivos, cada término, excepto el primero y el segundo, es la suma de todos los términos anteriores a él. Si el primer término es 1 y el quinto término es 40, ¿cuál es el segundo término?

Problema 13. ¿Cuántos números enteros con nueve cifras empiezan con 1 y la suma de cada 3 cifras consecutivas es un mismo número menor que 6?

Problema 14. Elisa eliminó un número de una lista de 10 números enteros consecutivos. La suma de los que quedaron es 2024. ¿Cuál es el número que eliminó?

Problema 15. Hay varias posibilidades de acomodar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 dentro de los círculos de la figura, de manera que las sumas de los 3 números que quedan sobre los vértices de los triángulos sombreados sean todas iguales. ¿Cuál es la suma de todos los números que podrían quedar en el vértice central?



Soluciones del Examen individual Nivel I.

Solución 1. Veamos las medidas del rectángulo de traslape. El lado vertical mide $8-3 = 5$ cm, y el lado horizontal mide $10-6 = 4$ cm. Entonces el área buscada es

$$15 \times 8 + 10 \times 12 - 5 \times 4 = 120 + 120 - 20 = 220 \text{ cm}^2.$$

Solución 2. Notemos que $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; queremos repartir sus factores. Si tomamos los números $(2, 2, 3, 5)$, el 2 se repite, por lo que parecería que no hay solución. Pero si nos damos cuenta que podemos usar el 1 como opción, debemos formar 3 números menores a 10. El 5 debe estar solo, por lo que los dos restantes se forman con 2, 2, 3. Las opciones son 3, 4 y 2, 6. Las sumas correspondientes son $1 + 3 + 4 + 5 = 13$ y $1 + 2 + 5 + 6 = 14$, por lo que el resultado es 14.

Solución 3. Observamos que $444 = 4 \times 111$ y que $55555 = 5 \times 11111$; entonces

$$444 \times 55555 = 4 \times 5 \times 111 \times 11111 = 20 \times 1\,233\,321 = 24\,666\,420.$$

Solución 4. Del 1 se mueve al 2, del 2 al 4, del 4 al 8, del 8 da la vuelta hasta el 4, luego va alternando entre el 4 y el 8. Vemos que en el minuto 2 llega al 4, en el minuto 3 llega al 8, y de ahí alterna, los minutos pares en el 4 y los minutos impares en el 8. Como 2 horas equivalen a 120 minutos, y 120 es par, después de 2 horas Flynn llegará al 4.

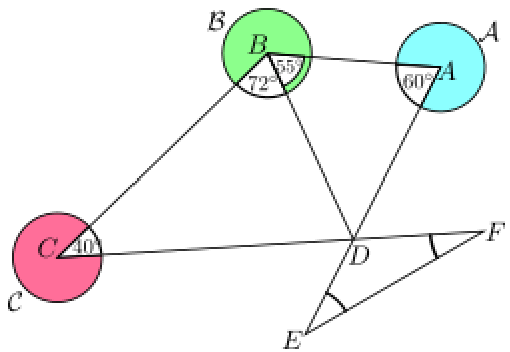
Solución 5. La cifra de las unidades es 2, y se encuentra sumando x 9 veces, de manera que $x = 8$. Ahora sumamos:

$$818+828+838+\cdots+898 = 800\cdot 9+8\times 9+10(1+2+3+\cdots+9) = 7200+72+450 = 7722.$$

Tenemos así que $a = 7$, $b = 2$ y $x = 8$ y, por lo tanto, $a + b + x = 17$.

Solución 6. Hay 4 diferentes "orientaciones" pero todas son equivalentes, así que basta con contar en una orientación. Por ejemplo, en L. La esquina del triminó puede estar en cualquier casilla excepto la fila superior o la columna derecha. Por tanto en esa orientación, hay $6 \times 8 = 48$ posiciones, de modo que en total hay $48 \times 4 = 192$.

Solución 7. Si a A le falta $1/6$, el ángulo BAD mide 60°; si a B le falta $1/5$, el ángulo CBD mide 72°; y si a C le falta $1/9$, el ángulo DCB mide 40°.



Sabemos que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°. Entonces, en el cuadrilátero $ABCD$ tenemos que

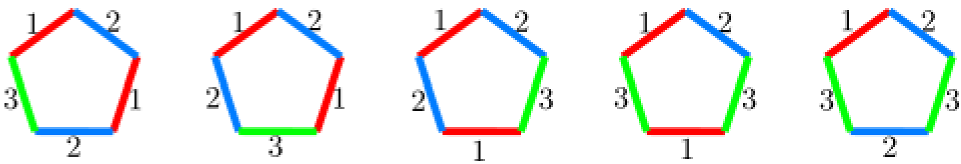
$$\angle ADC = 360^\circ - (60^\circ + 55^\circ + 72^\circ + 40^\circ) = 133^\circ.$$

y de aquí que

$$\angle E + \angle F = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ.$$

Solución 8. Al cambiar la cuenta, cada una pagó \$37 más, de manera que a Abigaíl le habían tocado $37 \cdot 6 = 222$ pesos. La cuenta original era de $222 \cdot 7 = 1554$ pesos.

Solución 9. Digamos que los colores son 1, 2 y 3. La elección de los dos que quedan arriba se puede hacer de $3 \cdot 2 = 6$ formas. Si, por ejemplo, en el sentido de las manecillas del reloj se escogieron 1 y luego 2, los que siguen tienen las siguientes 5 posibilidades:



Entonces la respuesta es $6 \cdot 5 = 30$.

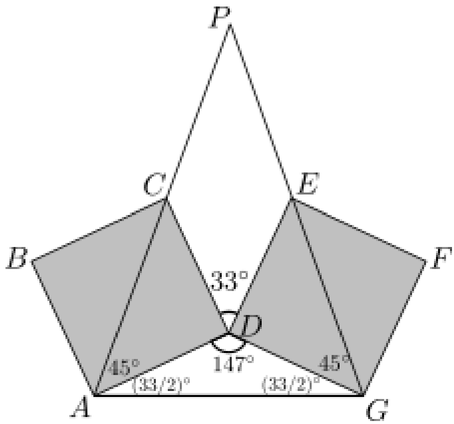
Solución 10. Podemos pensar que el perito rápido va a 20 metros por segundo y que la pista mide 60 metros. Hagamos una tabla de las posiciones de los perritos cada segundo, hasta completar una vuelta completa del más lento.

segundos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
rápido	0	20	40	60	40	20	0	20	40	60	40	20	0
lento	0	10	20	30	40	50	60	50	40	30	20	10	0

Entonces, por cada vuelta que da el perrito lento, los dos se encuentran en 3 puntos: a los $2/3$ de la pista, luego de nuevo en ese mismo punto y de nuevo en el punto de partida. Por lo tanto, si el perrito lento da tres vueltas, los dos se encuentran 9 veces sin contar cuando comienzan a correr.

Solución 11. Teniendo en cuenta que $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle CDE = 33^\circ$ y $\angle EDG = 90^\circ$, es fácil deducir que $\angle ADG = 147^\circ$. Como $AD = DG$, el triángulo ADG es isósceles. Así, $\angle DAG = \angle AGD = (33/2)^\circ = 16.5^\circ$. Ya que AC y EG son diagonales de los cuadrados, tenemos que $\angle CAD = \angle DGE = 45^\circ$. En consecuencia,

$$\angle APG = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ + 33^\circ) = 57^\circ.$$



Solución 12. Notamos que, a partir del tercer término, cada uno duplica el término anterior. Entonces el cuarto término es 20, el tercero es 10 y el segundo es $10 - 1 = 9$. (La lista es $1, 9, 10, 20, 40, \ldots$.)

Solución 13. La primera cifra sabemos que es 1; al escoger la segunda y tercera cifra, ya todo el número está determinado porque la suma de 3 cifras consecutivas es una constante (o sea, la cuarta cifra es 1 al igual que la primera, la quinta es igual a la segunda, la sexta igual a la tercera, etc.) Buscamos que la suma de la segunda y tercera cifra sea menor que 5 (para que, sumada con 1, sea menor que 6). Analicemos las posibilidades para estas dos cifras:

Con suma 0 hay 1: 100.

Con suma 1 hay 2: 01 y 10.

Con suma 2 hay 3: 11, 20 y 02.

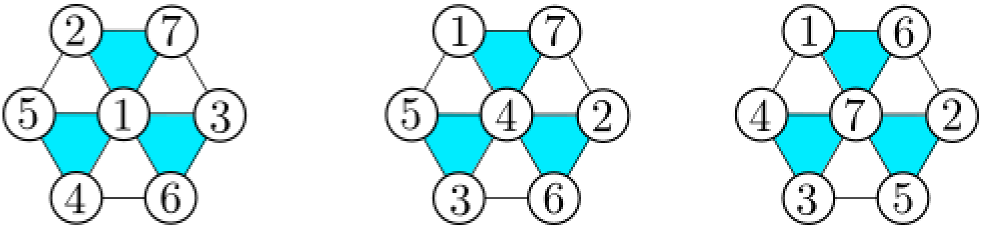
Con suma 3 hay 4: 30, 03, 21 y 12.

Con suma 4 hay 5: 40, 04, 31, 13 y 22.

En total son $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Solución 14. La suma de las unidades de los 10 enteros consecutivos es $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, que termina en 5. Como al quitar un número, la suma es 2024, que termina en 4, el número que se quitó debe terminar en 1. Entonces la nueva suma de las unidades es $5 - 1 = 44$. Como $2024 - 44 = 1980 = 220 \cdot 9$, el número que Elisa eliminó es el 221. (El primer número de la lista era 220.)

Solución 15. Llamemos x al un número que puede ir en el centro. Sabemos que la suma de los vértices de cada triángulo es un mismo número s, así que $3s$ se obtiene sumando todos los números distintos de x con 3 veces x (o sea, x aparecerá 2 veces más que los otros). Entonces $28 + 2x$ debe ser múltiplo de 3. Las posibilidades son $x = 1, 4, 7$, con respectivas sumas $\frac{30}{3} = 10$, $\frac{36}{3} = 12$ y $\frac{42}{3} = 14$. Los acomodos con estos números se logran como se muestra en la figura abajo. La suma es $1 + 4 + 7 = 12$.



Prueba por Equipos, Nivel I

Problema 1. Hay un entero positivo de cinco dígitos *abcde*. Ninguno de sus dígitos es cero. Los números formados por los dígitos *ab*, *bc*, *cd* y *de* son todos cuadrados perfectos. Encuentra el número *abcde*.

Problema 2. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 10^{20} cumplen la condición de que la suma de sus dígitos es 2?

Problema 3. Don Ramón tiene 3 hijos de distintas edades. Se sabe que:

El producto de las edades de sus hijos es 720.

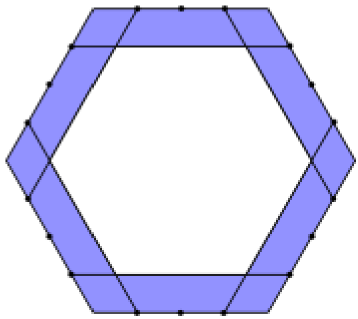
Las edades de sus 3 hijos son pares.

Tiene solo un hijo cuya edad es múltiplo de 3.

El menor tiene más de dos años.

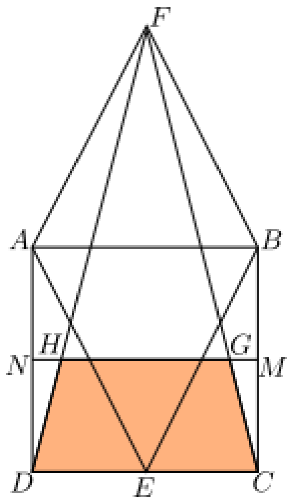
Encuentra la suma de las edades de los hijos de Don Ramón.

Problema 4. Cada uno de los lados de un hexágono regular se divide en 4 partes iguales y se traza el hexágono más pequeño en color blanco. Si el área de todo el hexágono es de 720 cm^2, ¿cuántos centímetros cuadrados tiene de área el hexágono blanco?

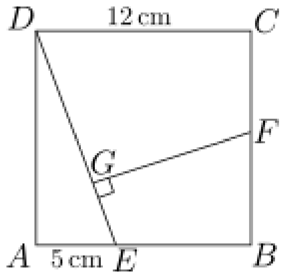


Problema 5. Los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se agrupan en parejas para formar 5 números de dos cifras cada uno. ¿Cuánto es lo máximo que se puede obtener como resultado de la división de la suma de 3 de ellos entre la diferencia (resta) de los otros dos?

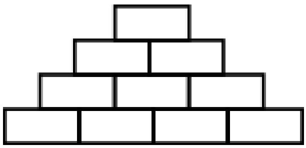
Problema 6. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ que tiene de lado 8 cm; M, N y E son los puntos medios de los lados BC, AD y CD, respectivamente. Determina el área, en centímetros cuadrados, del trapecio sombreado $DCGH$, considerando que $AEBF$ es rombo y que H y G son las respectivas intersecciones de NM con DF y con CF.



Problema 7. La figura muestra un cuadrado $ABCD$ de lado 12 cm. El punto medio del lado BC es F, E es un punto sobre el lado AB tal que AE mide 5 cm. Además G es un punto sobre DE de manera que GF es perpendicular DE. ¿Cuántos centímetros mide GF?



Problema 8. Con bloques de madera de colores se construyen "pirámides" de cuatro pisos que tienen cuatro bloques en el primer piso, tres en el segundo, dos en el tercero y un bloque en el cuarto piso, como la que se muestra en la figura. Se pide, además, que bloques que se tocan sean de distinto color y que no haya pirámides que usen cuatro colores. Encontrar el máximo número de pirámides que pueden construirse si se dispone de 21 bloques azules, 14 rojos, 13 morados y 12 blancos.



Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

Solución 1. Los cuadrados de dos dígitos (no cero) son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Notamos que empiezan en 1, 2, 3, 4, 6 y 8, y terminan en 1, 4, 5, 6 o 9. Entonces $b = 1, 4$ o 6. Si $b = 1$, el número es 81649. Si $b = 4$, entonces $abc = 649$, pero ningún cuadrado empieza con 9. Si $b = 6$, entonces $abcd = 3649$, que tampoco es posible.

Solución 2. Primera forma. Los números que buscamos tienen 20 cifras. Si empiezan con 2 hay 20. Los demás deben tener dos $1'$s. Podemos contar éstos, simplemente pesando que tenemos 20 posiciones en las que debemos escoger 2 para colocar los $1'$s (en las demás son $0'$s); por ejemplo, el número 11 es el que tiene 18 $0'$s al principio. Éstos son

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190.$$

Segunda forma. Para contar los que tienen tienen dos $1'$s podemos hacerlo por casos. Con 2 cifras hay 1 (el 11), con 3 cifras hay 2 (el 110 y el 101), con 4 cifras hay 3 (el 1100, el 1010 y el 1001), así sucesivamente hasta los que tienen 20 cifras, que son 19. Entonces los que empiezan con 1 son

$$1 + 2 + \cdots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190.$$

Solución 3. Hay que repartir los factores entre los 3 hijos de Don Ramón de tal manera que el producto sea $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Como las 3 edades son pares, tenemos que hay solo una forma de repartir los factores 2:

2 2	2	2

Por otro lado, sólo hay un niño cuya edad es múltiplo de 3, de donde se obtiene que los 2 factores 3 deben de ir con el mismo niño. También hay que ver cómo poner el factor 5, tomando en cuenta que todos los hijos tienen más de 2 años. La única forma de hacerlo es:

2 2	2 3 3	2 5

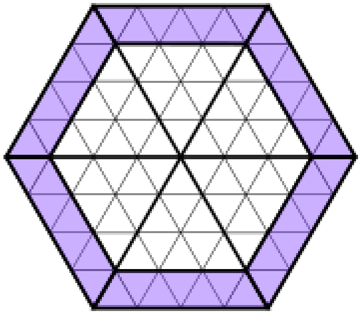
Entonces las edades son $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 \times 3 = 18$ y $2 \times 5 = 10$. La suma de éstas es $4 + 18 + 10 = 32$.

Solución 4. Primera forma. Continuemos la figura de manera que quede toda triangulada como se muestra en la figura. Nos fijamos que si partimos todo el hexágono en 6 triángulos, todos con un vértice en el centro del hexágono, entonces cada uno de estos 6 triángulos consta de 16 triangulitos, así que la figura completa queda partida en $6 \times 16 = 96$ triangulitos. Entonces cada triangulito tiene área

$$\frac{720}{96} = \frac{15}{2} \text{ cm}^2.$$

Como la parte sombreada consta de $7 \times 6 = 42$ triángulitos, el área del hexágono blanco es

$$720 - 42 \times \frac{15}{2} = 720 - 21 \times 15 = 720 - 315 = 405 \text{ cm}^2.$$



Segunda forma. Los lados del hexágono blanco miden 3/4 partes del hexágono original, así que el área del hexágono blanco es

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 720 = \frac{9}{16} \times 720 = 9 \times 45 = 405 \text{ cm}^2.$$

Solución 5. Se puede lograr 1 en el denominador poniendo cualquiera de 20−19, 30−29, etc., pero queremos dejar en el numerador los números más grandes, así que escogemos 20-19 para el denominador. Para el numerador escogemos 85 + 74 + 63 (o revolviendo los dígitos de las unidades entre sí). El resultado de la división es

$$\frac{85 + 74 + 63}{20 - 19} = 222.$$

(Nota. Si no ponemos 1 en el denominador, como el numerador es menor que $100 \times 3 = 300$, el resultado sería menos que $\frac{300}{2} = 150 < 222$.)

Solución 6. Como $HG \| DC$, el teorema de Tales nos indica que los triángulos FHG y FDC son semejantes. La altura de FDC es la diagonal del rombo $AEBF$, que mide el doble del lado del cuadrado, es decir 16 cm. También tenemos que la altura del trapecio $DCGH$ es 4 cm, con lo cual la altura del triángulo FHG es $16 - 4 = 12$ cm. Entonces la razón de semejanza de los triángulos FHG y FDC es

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \frac{HG}{DC},$$

y así $HG = 6$ cm, por lo cual el área del trapecio $DCGH$ es

$$\frac{(8 + 6) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2.$$

Solución Alternativa Sean A' y B' las intersecciones de AB con FD y FC, respectivamente. Por el criterio LLL se tiene que $\triangle ABF \cong \triangle AEB$. Luego, la altura de $\triangle ABF$ es de

8 cm, de donde la altura de $\triangle DFC$ es 16 cm. Así, como $AB||CD$ y CD mide 8 cm, se sigue que $A'B'$ mide 4 cm, y por la simetría de la figura obtenemos que AA' y BB' miden 2 cm.

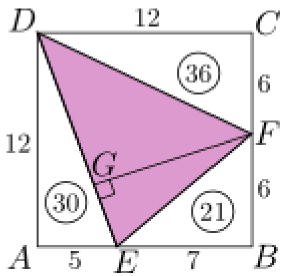
Ahora bien, como N y M son puntos medios de AD y BC, respectivamente, entonces $\triangle AA'D \sim \triangle NHD$ y $\triangle BB'C \sim \triangle MGC$ en razón $2 : 1$, de donde HN y GM miden 1 cm cada uno. Por lo tanto, $[\triangle NHD] = [\triangle MGC] = 2$ cm^2, y como $[DCMN] = 32$ cm^2, concluimos que $[CDGH] = 28$cm^2.

Solución 7. Tenemos que

$$\text{área}(DEF) = \text{área}(ABCD) - \text{área}(AED) - \text{área}(CDF) - \text{área}(FBE).$$

Así,

$$\frac{DE \times FG}{2} = 12 \times 12 - \frac{5 \times 12}{2} - \frac{7 \times 6}{2} - \frac{6 \times 12}{2} = 144 - 30 - 21 - 36 = 57.$$



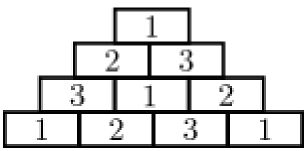
Por otro lado, por el teorema de Pitágoras, $DE = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, así que

$$57 = \frac{DE \times FG}{2} = \frac{13 \times FG}{2},$$

y de aquí tenemos que

$$FG = \frac{114}{13} \text{ cm.}$$

Solución 8. Como las pirámides no pueden usar los cuatro colores, pensemos que una pirámide usa los colores 1, 2 y 3. Al comenzar poniendo 1 en la esquina inferior izquierda y 2 a su lado, notamos que arriba de ellos debe ir 3, que todo lo demás está determinado y que los tres colores 1, 2 y 3 son distintos.



Notamos también que el número de bloques de cada pirámide es $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, que cada pirámide usa 4 bloques de un color, 3 de un segundo color y 3 de un tercer color; también notamos que $21 + 14 + 13 + 12 = 60$ y, como $\frac{60}{10} = 6$, queremos ver si es posible distribuir todos los bloques disponibles para construir las 6 pirámides.

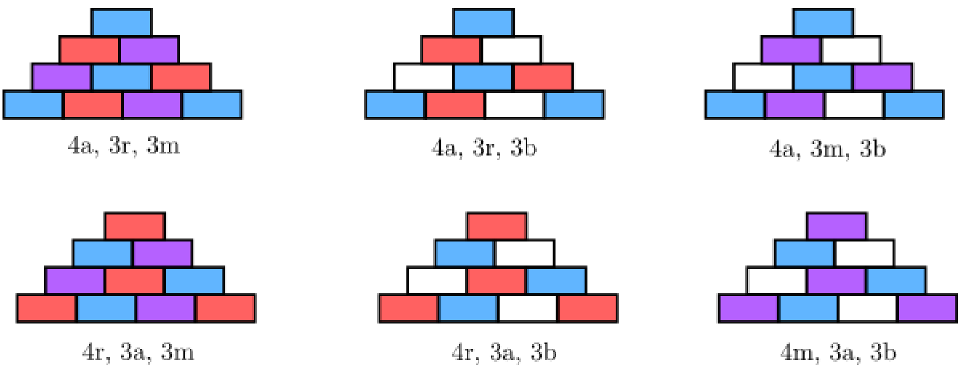
Se dispone de 21 bloques azules y la única forma de lograr sumar 21 usando a lo más 6 sumandos que sólo pueden ser 3 o 4 es:

$$21 = 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3,$$

de aquí que las 6 pirámides usan bloques azules, tres de ellas usan 4 y las otras tres usan 3. Vemos también que

$$\begin{aligned} 14 &= 4+4+3+3 \\ 13 &= 4+3+3+3 \\ 12 &= 3+3+3+3 \end{aligned}$$

así que una posible distribución se muestra en la figura:



Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.

Definición 2 (Congruencias)**.** Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.

2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.

3. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.

4. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \left(\bmod \frac{m}{(b,m)}\right)$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.

Teorema 2 (Pequeño Teorema de Fermat)**.** Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 3 (Inducción)**.** El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:

1. Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.

2. Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.

3. Paso inductivo: Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas). Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.

Teorema 5 (Combinaciones). Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio de Newton). Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Teorema 9 (Pitágoras). En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Definición 3 (Congruencia de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Teorema 10 (Criterio de congruencia LLL). Si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.

Teorema 11 (Criterio de congruencia ALA)**.** Si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema 12 (Criterio de semejanza AA)**.** Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.

Teorema 13 (Tales)**.** Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 14 (Teorema de la Bisectriz)**.** Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 15 (Ceva)**.** Dado ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.

Teorema 16 (Menelao)**.** Dado un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común sobre la circunferencia.

2. Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia en el punto de tangencia.

3. Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito)**.** La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 18 (Medida del ángulo seminscrito)**.** La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersecan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de cualquiera de sus pares de ángulos opuestos es igual a 180°, esto es,

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

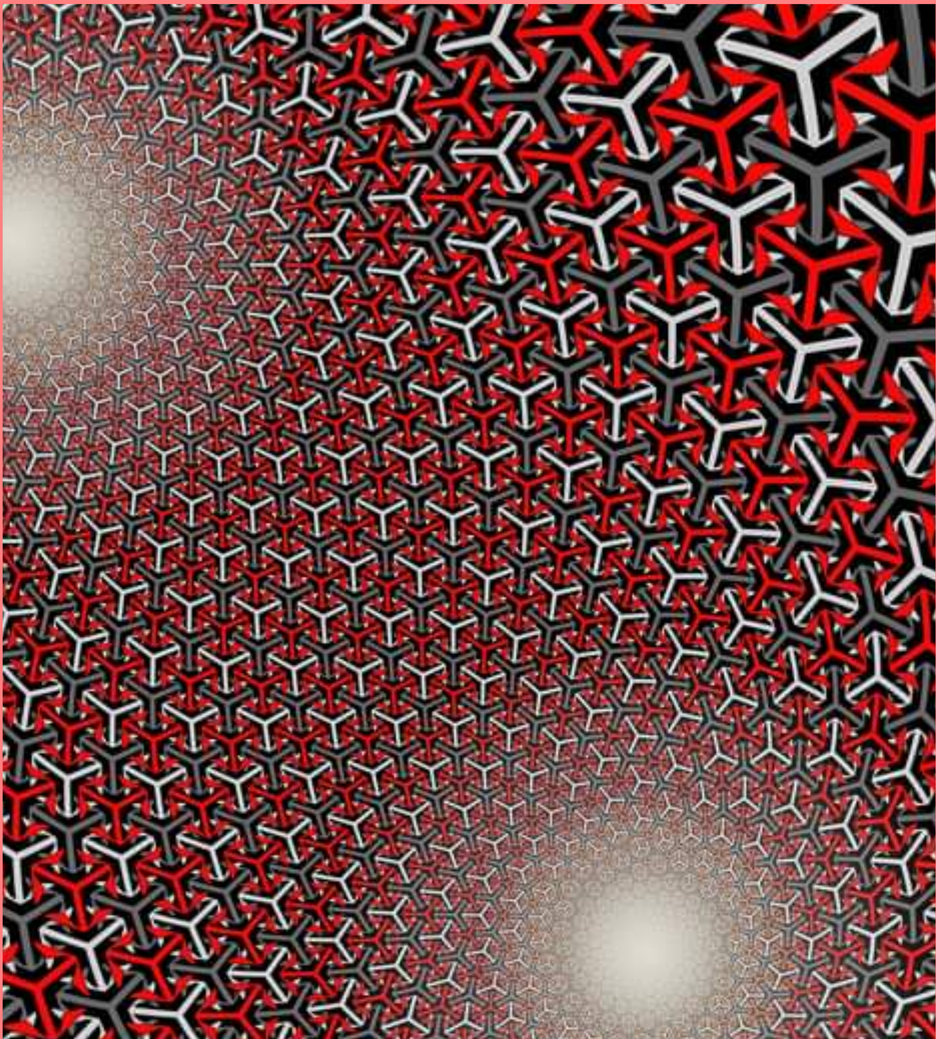
[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega
(Presidente)

César Guadarrama Uribe
Claudia Marcela Aguilar Hernández
David Guadalupe Torres Flores
Enrique Treviño López
Héctor Raymundo Flores Cantú
Hugo Villanueva Méndez
Ignacio Barradas Bribiesca
José Eduardo Cázares Tapia
José Omar Guzmán Vega
Kenya Verónica Espinosa Hurtado
Kevin William Beuchot Castellanos
Luis Eduardo García Hernández
Luis Mauricio Montes de Oca Mena
María Eugenia Guzmán Flores
María Luisa Pérez Seguí
Mónica Mateos Vega
Myriam Hernández Ketchul
Rosa Victoria Rodríguez Olivé



SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864