ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

16 • 01

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Año 16, No. 1, febrero 2024 es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C. Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel. 55-5849-6709
smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.
Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2024, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Marzo de 2024

Índice general

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2024, Número 1

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribui-

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

do a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2004. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2023-2024 y, para el 1° de julio de 2024, no haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información consulta la página: `http://www.ommenlinea.org`. Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 5 al 10 de noviembre de 2023, en la ciudad de Durango, Durango. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2023 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2024) y a la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2024).

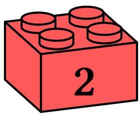
De entre los concursantes nacidos en 2007 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2024).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2024.

Los bloques numéricos

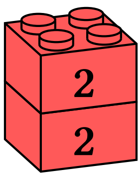
Pedro Sánchez

En este artículo presentamos una forma de visualizar propiedades básicas de los números enteros y cómo puede ser útil para resolver problemas de Olimpiada. Para empezar, consideremos un bloque como el que se muestra a continuación e imaginemos que representa un número, digamos 2.



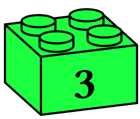
2

Si unimos dos de esos bloques, obtenemos, por supuesto, el 4.



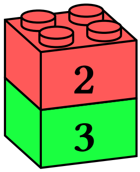
4

No podremos obtener el 3 combinando los bloques anteriores, por lo que necesitamos un nuevo tipo de bloque.



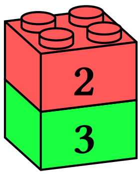
3

Inmediatamente nos entra la curiosidad de combinar un bloque rojo con uno verde, e imaginamos que quizás hemos obtenido el número 5:



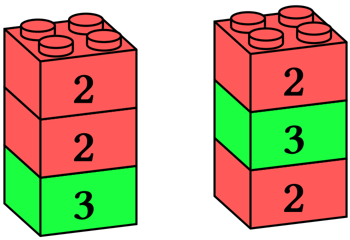
?

Sin embargo, en realidad esa combinación no representa al 5 sino al 6, dado que estos bloques numéricos son *multiplicativos*: combinar bloques equivale a multiplicar sus valores.



6

Con esos dos colores ya podemos *construir* muchos números: $2, 3, 4, 6, 8, 9$ y otros. Una observación es que, no importa el orden de los bloques, sino unicamente cuáles fueron combinados. Así:



12 **12**

son representaciones del mismo número 12.

Continuando con el proceso, notamos que hay números como el $2, 3, 5, 7, \ldots$ que están formados por un solo bloque, no es posible obtenerlos combinando otros que ya tengamos previamente, mientras que otros números como $4, 6, 9, 12, 15, \ldots$ están *compuestos* de otros bloques. Aquellos números que corresponden a los bloques son precisamente los *números primos*, mientras que los otros son precisamente los *números compuestos*.

Pero quizás te preguntarás acerca de una omisión, ¿qué pasa con el 1? Bueno, el 1 es un caso especial (ni es primo, ni es compuesto), y en esta metáfora de bloques, el 1 no corresponde a ningún bloque (o alternativamente, podemos pensarlo como en una lámina sin grosor).

Uno puede ya comenzar a hacerse preguntas interesantes. Por ejemplo ¿realmente todos los números primos corresponden a un solo bloque? ¿Y será cierto que todos los números compuestos se corresponden a varios bloques pegados? ¿Puede haber algún número que se pueda obtener de maneras diferentes, salvo el orden en que se pegan los bloques?

La respuesta a la primera pregunta es que sí, consideremos lo siguiente. Imaginemos que existiera un número primo que no correspondiera a un solo bloque, entonces de todos los que pudiera haber con esa característica, tomamos el más pequeño p. En otras palabras, estamos imaginando que p es la primera vez que un primo corresponde a varios bloques pegados, pero en ese caso, cualquiera de sus bloques sería un divisor propio y por tanto contradeciría que es primo, por lo que concluimos que todos los primos en esta representación corresponden a un solo bloque.

Pero además, imaginemos ahora que hubiera números compuestos que correspondan a bloques sueltos. Nuevamente, de todos los que tengan esa característica, tomemos a m como el menor de todos ellos. Es decir, que m fuera el primer número compuesto que no se puede obtener pegando bloques. Como m es compuesto, m debe tener algún divisor propio $a > 1$ y por tanto $m = ab$ donde $b = m/d$. Observemos que tanto a como b son enteros mayores que 1 y menores que m, por tanto, o son primos (y están formados por un solo bloque) o son compuestos (y están formados por varios bloques, ya que m es el menor compuesto que no se podía descomponer en varios bloques). En cualquier caso ab se obtiene pegando al menos dos bloques, lo cual contradice que $m = ab$ no se podía obtener pegando varios bloques. Podemos resumir ambas observaciones en el siguiente resultado.

Teorema 1. En la representación de bloques, los números primos son precisamente aquellos que solo se pueden representar con un bloque suelto, mientras que todo número compuesto se representa pegando varios bloques.

La tercera pregunta es más interesante, ¿será posible que haya un número que se obtenga pegando bloques de maneras diferentes? Recordemos que "torres" obtenidas pegando los mismos bloques pero en orden distinto representan el mismo número, mientras que aquí nos estamos preguntando si es posible obtener el mismo resultado pegando bloques diferentes. Aquí la respuesta es que no, y dicha propiedad se conoce como el *Teorema Fundamental de la Aritmética.*

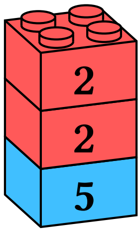
Teorema 2. Todo número entero mayor que 1 es primo, o es un producto de números primos. Además, dicha representación es única, salvo el orden en que se presentan los factores.

Omitiremos en este punto la prueba detallada, por ser un poco más técnica, pero señalamos que el estilo de prueba es similar, considerando el primer número donde el teorema es falso, y derivando de ahí una contradicción.

Divisores

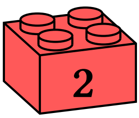
Una propiedad interesante de los bloques numéricos, es que nos permiten describir de forma visual aquellos números que son divisores de otro.

Por ejemplo, consideremos la torre correspondiente al 20.

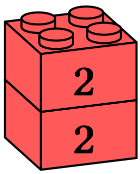


20

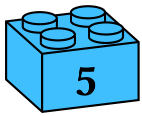
Sus divisores (nuevamente, descontando al 1), son $2, 4, 5, 10$ y 20, que tienen como representaciones:



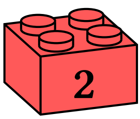
2



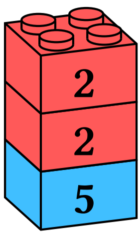
4



5



10



20

Son, precisamente, aquellas torres que podemos construir con los bloques de la torre correspondiente al número 20. Esta propiedad funciona en las dos direcciones:

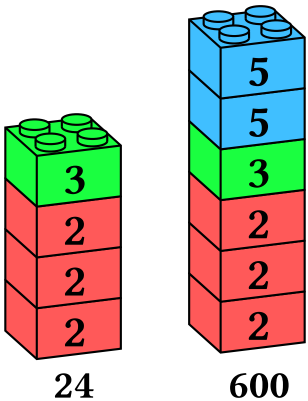
- Si un número a divide a un número b, entonces la torre correspondiente al número a se puede construir con los bloques que forman la torre del número b.

- Si los bloques de la torre correspondiente al número a se pueden encontrar dentro de la torre correspondiente al número b, entonces el número a divide al número b.

Vamos a usar la propiedad anterior para resolver un problema que aparece en un examen regional de Yucatán 2024.

Problema 1 (Yucatán 2024)**.** ¿Cuántos números son múltiplos de 24 pero también son divisores de 600?

Si consideramos las descomposiciones de los números 24 y 600 en bloques, observamos que la diferencia entre ambas es que una contiene dos bloques azules 5 y la otra no. Además, todos los múltiplos de 24 deben contener los tres bloques rojos 2 y el bloque verde 3, pero para ser divisores de 600, no podemos usar más de dos bloques azules 5.



El análisis anterior revela que sólo hay 3 múltiplos de 24 que sean divisores de 600:

- Tomar tres bloques rojos 2 y un bloque verde 3: 24.

- Tomar tres bloques rojos 2, un bloque verde 3, y añadir un bloque azul: $24 \times 5 = 120$.

- Tomar tres bloques rojos 2, un bloque verde 3, y añadir dos bloques azules: $24 \times 5 \times 5 = 600$.

$\square$

Factorizaciones

Es posible que te preguntes, ¿cómo supimos que los bloques que forman al 600 son precisamente tres rojos 2, un verde 3 y dos azules 5? Aquí vamos a concentrarnos en el proceso contrario a pegar bloques, vamos a *romper torres*, operación que se llama *factorizar* un número. Esta operación, la aprendemos en la escuela primaria cuando necesitamos calcular mínimo común múltiplo para realizar operaciones con fracciones. En la escuela se procede como sigue:

Problema 2. Factoriza el número 600.

Se coloca a continuación el número junto a una línea vertical y se procede a preguntar si tiene "mitad", "tercia" y así sucesivamente.

600	2	tiene mitad
300	2	tiene mitad
150	2	tiene mitad
75	3	tiene tercia
25	5	tiene quinta
5	5	tiene quinta
1	2	fin

Y entonces concluimos que $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$. El problema es que, en ocasiones, es difícil determinar "qué tiene un número", sobre todo cuando pasamos de mitades y tercias. Por ejemplo, si quisiéramos factorizar 340, comenzaríamos como:

340	2	tiene mitad
170	2	tiene mitad
85	2	tiene ¿tercia? no, entonces ¿tiene quinta? ...

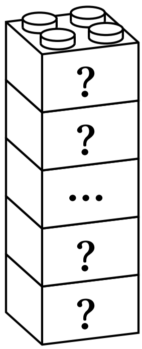
Parte del problema es que los factores primos los tenemos que ir sacando *en orden*, con lo cual en los pasos intermedios pueden quedar números donde no sea tan claro qué primo podemos extraer. Sin embargo, algo que no nos dicen en la escuela, es que para factorizar un número no es necesario proceder en orden.

Consideremos la siguiente torre, en donde los puntos suspensivos indican que, en realidad, no sabemos cuántos factores habrá por lo que no conocemos en principio la "altura" real.

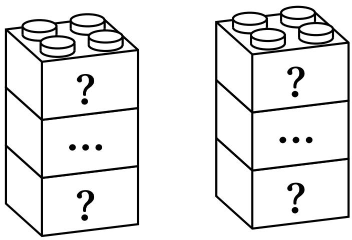
Ahora, en vez de proceder a factorizar de primo en primo, podemos romper la torre en dos piezas: 34 y 10.

Y como son números más pequeños, podemos romper rápidamente $34 = 2 \cdot 17$ y $10 = 2 \cdot 5$ para obtener la descomposición buscada, sin intentar "tercias", "séptimas", etc. Así, hemos encontrado que $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$.

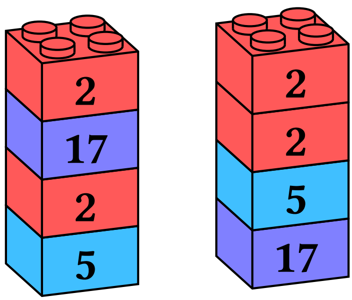
En un examen, como la OMMEB o la IMC, donde el manejo del tiempo es más importante, este tipo de consideraciones pueden permitir hacer factorizaciones de manera



340



34 **10**



340 **340**

más rápida, permitiendo usar más tiempo en otros problemas. En general, en vez de tratar de buscar los factores primos “de uno en uno” y en orden, es más rápido descomponer un número en dos o más factores (romper la torre en piezas) simples, aunque no sean primos, y luego repetir el proceso en cada uno de ellos, que siendo números más pequeños, se pueden factorizar cada vez más rápido.

Señalamos también que estos bloques son solo una ayuda visual, pues no es necesario dibujarlos siempre, lo ideal es que se usen solo como una representación para entender la estructura de los factores, pero en la práctica se pueden omitir, como muestra el siguiente ejemplo.

Problema 3. Factoriza 1400.

Dado que $1400 = 14 \cdot 10 \cdot 10$, entonces

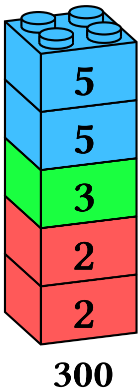
$$1400 = (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

□

Contando divisores

Por medio de los bloques numéricos, podemos entender un resultado muy famoso que permite saber la cantidad de divisores que tiene un número.

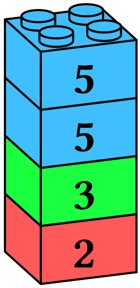
Imaginemos, por ejemplo, que requiriéramos saber cuántos números positivos dividen a 300. Si consideramos su torre de bloques, tendremos la siguiente descomposición.



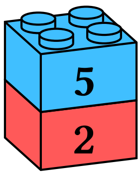
Como mencionamos antes, cada uno de los divisores de 300 tiene que *caber* dentro de esa torre. En otras palabras, los divisores de 300 son aquellos números que se pueden formar únicamente con dos bloques rojos 2, un bloque verde 3 y dos bloques azules 5. Pero además, cada posible combinación de algunos de esos bloques corresponde a un divisor, de modo que contar la cantidad de divisores es equivalente a contar la cantidad de formas de escoger algunos de esos bloques.

Una selección de bloques tiene, entonces, tres decisiones: a) ¿Cuántos bloques rojos 2 se usarán? b) ¿Cuántos bloques verdes 3 se usarán? c) ¿Cuántos bloques azules 5 se usarán?

Por ejemplo, si usamos un bloque rojo 2, un bloque verde 3 y dos bloques azules 5, tenemos



y 150 es un divisor de 300, mientras que si decidimos usar un bloque rojo 2, cero bloques verdes 3 y un bloque azul 5, tendremos



que corresponde a 10, también divisor de 300.

Ahora, si tenemos dos bloques rojos [2] disponibles, hay tres posibilidades para elegir: cero, uno o dos bloques rojos; disponemos de un bloque verde [3], por lo que hay dos posibilidades para elegir:uno o ninguno; finalmente, hay dos bloques azules [5] disponibles, por tanto tres posibilidades para elegir: 0, 1 o 2 bloques azules. Aplicando el *principio de la multiplicación* de combinatoria, concluimos que hay $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ posibles divisores de 300.

Sin embargo, en este momento posiblemente estás preguntando si es posible que las tres opciones elegidas sean cero de forma simultánea. ¡Sí, es posible! Eso corresponde a la torre “vacía”, y según señalamos antes, la torre vacía representa al 1 que también es divisor de 300 y no debemos olvidarnos de él.

Todas las observaciones anteriores las podemos resumir en el siguiente teorema.

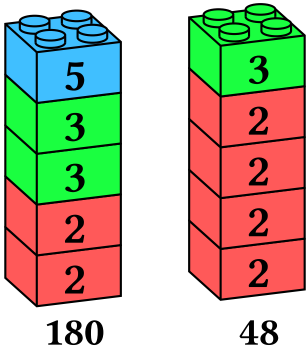
Teorema 3. Si el número $m > 1$ se factoriza en primos como $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, entonces la cantidad de divisores positivos que tiene m es $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$.

En la fórmula anterior, recordemos que cada primo p_k tiene disponible a_k bloques para usar, pero como existe la posibilidad de usar cero bloques, el número total de opciones será $a_k + 1$ para ese primo.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Para finalizar esta exposición, usaremos la representación de bloques numericos para explicar los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

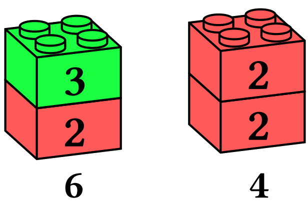
Imaginemos que nos piden calcular el máximo común divisor de dos números, por ejemplo, 180 y 48. Comenzamos con su representación en bloques numéricos.



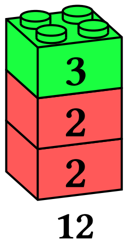
Un *divisor común* de 180 y 48 es un número d que divide a 180 y divide a 48. Pero previamente establecimos que los divisores de un número son aquellos que se pueden construir con los bloques de dicho número. Así, para tener un divisor de 180 debemos construir números usando como máximo dos bloques rojos 2, dos bloques verdes 3 y un bloque azul 5. Por otro lado, ese número debe ser también divisor de 48, por lo que no podemos usar más de cuatro bloques rojos 2 y un bloque verde 3.

Observemos que con las restricciones anteriores, un divisor común no puede contener un bloque azul 5 (porque el 5 no se encuentra dentro de 48). Más aún, no puede tener tres o cuatro bloques rojos 2, pues aunque estos cabrían dentro de 48, no cabrían dentro de 180, ni pueden tener dos bloques verdes 3, pues aunque cabrían dentro de 180, no cabrían dentro de 48.

Entonces, cualquier divisor común de 180 y 48 se debe poder formar usando únicamente dos bloques rojos 2 y un bloque verde 3. Algunos divisores comunes pueden ser:



Sin embargo, si queremos el *máximo* común divisor, debemos usar la mayor cantidad posible de bloques en común, lo cual sucede si tomamos la siguiente torre.



El razonamiento de arriba lo podemos generalizar a cualquier cantidad de números (torres). El **máximo común divisor** de cualquier cantidad de números, es la torre que se puede construir con la mayor cantidad de bloques que estén contenidos en todas las torres individuales. En otras palabras, el máximo común divisor es la mayor torre que podemos construir que quepa dentro de las torres dadas y esto requiere el mínimo de bloques de cada tipo entre las cantidades correspondientes a cada primo, que podamos encontrar en cada una de ellas.

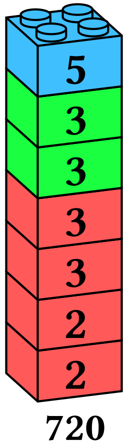
Ahora, procedemos a describir en términos de bloques el término dual, mínimo común múltiplo. Si m es un múltiplo común de dos números, por ejemplo, 180 y 48, entonces 180 es un divisor de m y 48 también es un divisor de m. Esto quiere decir, que la torre que representa a m necesariamente contiene los bloques de 180 y de 48. Si recordamos que la torre 180 tiene dos bloques rojos 2, dos bloques verdes 3 y un bloque azul 5, mientras que la torre 48 tiene cuatro bloques rojos 2 y un bloque rojo verde 3, podríamos pensar que los múltiplos comunes requerirían al menos $2 + 4 = 6$ bloques rojos 2, $2+1 = 3$ bloques verdes 3, y $1+0 = 1$ bloque azul. Sin embargo, hemos cometido un error, porque no es necesario que m contenga a ambas torres *simultáneamente*, solo tiene que contenerlas "por separado".

Si, además, deseamos encontrar el **mínimo común múltiplo** de dos números, debemos construir la menor torre que contenga a los dos números dados. En el ejemplo, queremos consturir la torre más pequeña que contiene a 180 y a 48.

La mínima cantidad de bloques que se requieren son: cuatro bloques rojos 2 (con menos bloques no podemos construir el 48), dos bloques verdes 3 (con menos bloques no podemos construir el 180), y un bloque azul 5 (necesario para el 180). De este modo, el mínimo común múltiplo de 180 y 48 correspondería a la siguiente torre.

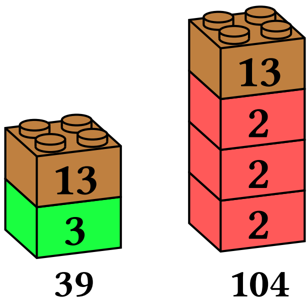
Problemas resueltos

A continuación presentamos una serie de problemas cuya solución puede plantearse desde la perspectiva de los bloques numéricos.



Problema 4. Un número *yuca* es un entero positivo que, al multiplicarlo por 104, se obtiene un número que es múltiplo de 39 y que termina en 6. Encuentra los tres números yucas más pequeños.

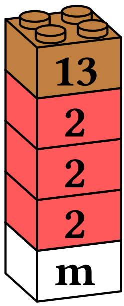
Solución. Los números 104 y 39 los podemos descomponer como muestra la siguiente figura.



Entonces necesitamos encontrar los menores números m tales que al pegar su torre con la de 104,
obtenemos una torre que contiene al menos un café 13 y un verde 3. Para que esto suceda, la única restricción necesaria es que m contenga a un verde 3. Así, los menores posibles valores que puede tener m son $3, 6, 9$ por lo que los tres yucas menores son $104 \cdot 3 = 312$, $104 \cdot 6 = 624$, $104 \cdot 9 = 936$. $\square$

Problema 5. Determina el valor de n para que $n!$ sea igual a $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

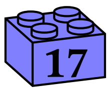
Solución. Dado que el bloque 13 aparece en el producto, y no es divisor de ningún número anterior, necesariamente n es mayor o igual a 13.



104m

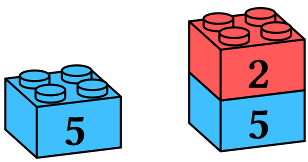
13

Pero el bloque 17 no aparece en el producto, de manera que n debe ser estrictamente menor a 17.



7

Por tanto, n solo puede ser $13, 14, 15$ o 16. Si n fuera menor a 15, las únicas torres conteniendo 5 serían:



5 **10**

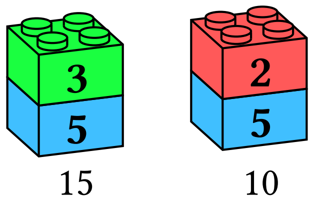
y por tanto en el producto el 5 sólo aparecería dos veces, pero sabemos que debe aparecer tres, por lo que las únicas posiblidades que quedan son $n = 15$ o $n = 16$.

Si $n = 6$, las torres que contienen a 2 serían las de $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ y 16, que aunque aparentemente dan 8 bloques rojos 2, en realidad 4 y 12 aportan uno más, 8 aporta dos más, y 16 aporta tres más, por lo que el producto tendría $8 + 1 + 1 + 2 + 3 = 15$ bloques iguales a 2, como pide el problema, esto descarta la posibilidad de que $n = 15$ pues en ese caso el producto únicamente tendría 12 bloques rojos tipo 2. $\square$

Problema 6. Demuestra que si a, b son primos relativos (es decir, su máximo común divisor es igual a 1), y ambos dividen a un número c, entonces ab también divide a c.

Solución. El que los números a, b sean primos relativos, quiere decir que no comparten ningún tipo de bloque, es decir, no hay bloques que puedan estar dentro de a ni dentro de b. Pero todos los bloques de a y todos los bloques de b están dentro de c, pero al no haber ninguno en común, cuando quitamos los bloques de a de la torre de c, no estamos quitando ningún bloque de b y por tanto ab cabría dentro de c.

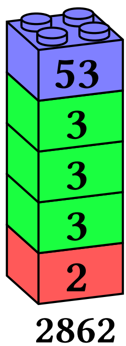
Es importante señalar que la hipótesis de que a, b sean primos relativos es crucial, pues en caso contrario el resultado puede no cumplirse. Por ejemplo, consideremos los números 15 y 10.



Ambos son divisores de 30, pero como tienen un bloque en común, el producto $15 \cdot 10 = 150$ falla en ser divisor de 30. □

Problema 7. Al estar leyendo un libro, me fijé que, si multiplico los números de las dos páginas que estoy viendo, el resultado es 2862. ¿Cuánto suman esos dos números?

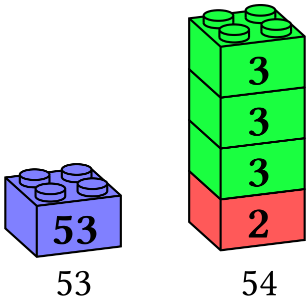
Solución. Pensando en bloques, sabemos que los dos números de página se deben construir con los bloques que forman al 2862.



Como los dos números buscados deben tener una multiplicación igual a 2862, necesitamos repartir todos esos bloques en dos torres. Pero como son páginas consecutivas, las dos torres deben representar números consecutivos, es decir, ambas torres van a tener *casi el mismo valor.*

Una de las torres tiene que tener el bloque de 53 (el cual, siendo primo, no se puede separar en piezas menores). Si añadimos alguna pieza aal 53, obtendremos un número muy grande, y no podremos con las piezas restantes *casi igualarla.*

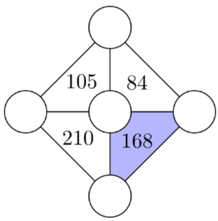
Por ello, pensemos que una torre está formada sólo por el bloque de 53, y la otra torre tiene todos los demás números.



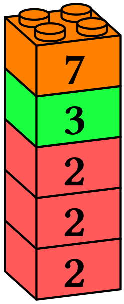
y como ambos valores sí son consecutivos, son los números de página buscados, de modo que la respuesta al problema es 107. □

En el folleto introductorio 2023 de la OMM, apareció el siguiente problema.

Problema 8. Los números 3, 4, 5, 6 y 7 deben distribuirse en los círculos de la figura de manera que el número dentro de cada triángulo sea el producto que se indica dentro. ¿Cuál es la suma de los 3 números que quedan alrededor del triángulo sombreado?



Solución. Considerando la torre que corresponde al número sombreado, podemos deducir que uno de los números alrededor debe ser el 7 (porque si ninguno de ellos fuera 7, al juntar sus torres, no incluirían ese bloque). Los otros dos números deben formarse usando tres veces el bloque rojo 2 y una vez el bloque verde 3. La única forma en que es posible hacerlo es cuando los números son 4 y 6, por lo que la suma de los tres será $4 + 6 + 7 = 17$. □



168

Problemas propuestos

Problema 9. ¿Cuántos números dividen a 16! (16 factorial)?

Problema 10. ¿Cuál es la menor cantidad de elementos que hay que quitar de la lista 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 para que cuando multiples los que quedaron, el resultado sea un cuadrado perfecto?
Sugerencia: ¿qué tiene que pasar con los bloques de un número para obtener un cuadrado perfecto?

Problema 11. Encuentra todos los números que sean múltiplos de 12 y que tengan exactamente 22 divisores.

Problema 12. Si eliges al azar un número que sea divisor de 400, ¿qué probabilidad hay de que sea múltiplo de 20?

Problema 13. Encuentra los números enteros positivos a, b más pequeños posibles para los cuales $7a^3 = 121b^5$.

Problema 14. ¿Cuántas ternas de enteros positivos *no ordenadas* $\{x, y, z\}$ cumplen $xyz = 2024$? ¿Y si el orden importara?

Problema 15. Usando bloques, ¿cómo explicarías el siguiente resultado?

Si a, b son números enteros positivos, el máximo común divisor de ka y kb es k veces el máximo común divisor de a y b, para cualquier entero positivo k.

Problema 16. Usando bloques, ¿cómo explicarías el siguiente resultado?

Si a, b son enteros positivos, el resultado de multiplicar el máximo común divisor de a, b con el mínimo común múltiplo de a, b es igual a ab.

Problema 17. Usando bloques, ¿cómo explicarías el siguiente resultado?

Si a, b son dos enteros positivos, entonces $mcd(a^n, b^n) = mcd(a, b)$, para cualquier entero positivo n.

Problema 18. Encuentra todos los números enteros positivos x, y que cumplen $x^2 + x - y^2 + y = 2023$.

Problema 19. En un triángulo rectángulo está inscrito un círculo de radio 6. Determina todos los triángulos rectángulos de lados enteros con esa característica.

La solución de todos los problemas propuestos, usando los bloques numéricos, se publicará en el siguiente número.

Problemas de práctica

A continuación presentamos 15 problemas de práctica seleccionados especialmente para este número. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Cuando los niños del planeta Neptúpiter aprenden matemáticas, en vez de aprender las operaciones $+$ (suma) y $\times$ (multiplicación), aprenden la operación ϕ (fusión), que significa tomar la suma de dos números y dividirla entre su resta. Por ejemplo $6\phi 4 = 10/2 = 5$, porque $6 + 4 = 10$ y $6 - 4 = 2$. Si 9ϕA da como resultado 5, en,tonces el número A es:

Problema 2. Didier está pensando en cierto número, N. El número más grande que divide a N pero que también divide a 45 es 15. El número más chico que es múltiplo de N y de 18 es 180. ¿Cuál es el número N?

Problema 3. Si todas las cifras de un número son iguales a 1, vamos a decir que es un número tartamudo. ¿Cuántos números menores que $10,000,000$ cumplen que al multiplicarlos por 33 se obtiene un número tartamudo?

Problema 4. ¿Cuál es el resultado de sumar todos los números de 2 cifras tales que ninguna de sus cifras es cero, el número de dos cifras es múltiplo de su cifra de las unidades y también es múltiplo de su cifra de las decenas?

Problema 5. En un tubo muy largo se encuentran una hormiga y una catarina. La hormiga se encuentra en el extremo derecho del tubo y camina 5/6 de la longitud del tubo, hacia la izquierda. La catarina se encuentra en el extremo izquierdo y camina 6/7 de la longitud del tubo, hacia la derecha. Cuando se detienen, se encuentran a 145 cm de distancia. ¿Cuánto mide el tubo?

Problema 6. Encuentra la suma de todos los enteros positivos entre 1004 y 2024 que terminan en 9.

Problema 7. Don Gregorio está escribiendo un libro sobre sus aventuras cuando era joven. Además de escribir sus aventuras, tuvo que escribir a mano todos los números de página:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023.$$

¡Qué coincidencia! El libro tiene 2023 páginas. ¿Cuántas veces escribió la cifra 5 cuando estuvo numerando las páginas?

Problema 8. Tienes dos números de dos cifras que al multiplicarlos resulta 1260. Si cada uno de ellos es múltiplo de 6, ¿cuánto suman los dos números?

Problema 9. Toma un número entero positivo d. Comenzando con el número 1, crea una lista de números aumentando siempre d al último número escrito. Por ejemplo, si $d = 4$, entonces los números que escribimos son $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$ ¿Para cuántos valores de d sucederá que el 2024 aparece en la lista?

Problema 10. Hay muchas formas de revolver las letras de la palabra OMMFEM. Por ejemplo, FMOMEM, MEFMMO, OMMFEM, y muchas más. Si todas las *palabras* que se pueden formar se ordenaran en una lista de forma alfabética (no importa que no tengan sentido), ¿qué palabra quedaría en la posición 90?

Problema 11. Encuentra todas las parejas de enteros (a, b) tales que $a^2+2b+2b^2 = 2023$.

Problema 12. En una mesa (muy grande) se tienen 2024 pilas de fichas (con cantidades que pueden ser distintas). Juan observa que, si seleccionamos cualquiera de las pilas, podemos juntar todas las demás y voler a repartirlas, formando tres pilas del mismo tamaño. Demuestra que la cantidad total de fichas en la mesa también es múltiplo de 3.

Problema 13. En una pizarra hay escritos tres números enteros positivos, digamos, A, B, C, que son todos menores a 2024. Daniel, que es muy travieso, los borra y los reemplaza por los promedios

$$\frac{A+B}{2}, \frac{B+C}{2}, \frac{C+A}{2}.$$

Al día siguiente, Daniel, que es muy travieso, vuelve a borrar esos tres números y los reemplaza por su promedio. Y continúa así diariamente. Al cabo de 11 días, resulta que los tres números que quedaron en la pizarra son enteros. Explica porqué forzosamente, los números originales eran iguales.

Problema 14. ¿Cuántos números enteros positivos menores 10000 tienen la suma de sus cifras igual a 6?

Problema 15. Hay 20 personas sentadas en una mesa redonda y se numeran del 1 al 20 en el sentido de las manecillas del reloj y quieren jugar asesino. El organizador del juego tiene que decidir a quien nombrar como asesino. Para ello, comenzando con la persona 1, realiza los siguientes movimientos: se mueve una posición a la izquierda, una a la derecha, después dos a la izquierda y una a la derecha, luego tres a la izquierda y una a la derecha, y continúa así hasta hacer 2024 movimientos. ¿A cuál persona le tocará ser el asesino?

Soluciones a los problemas de práctica.

Problema 1. Si reemplazamos $9\phi A = 5$ por

$$\frac{9+A}{9-A} = 5,$$

podemos deducir que $9+A$ es 5 veces más grande que $9-A$. Cuando A es positivo, $9+A$ también lo es, por lo que, al ser positiva la fracción, quiere decir que $9-A$ también lo es, lo cual reduce la cantidad de opciones posibles a comprobar, lo cual nos lleva a que $A = 6$.

Cuando A es negativa, $9+A$ es menor que $9-A$ y por tanto la fracción no puede ser iguala 5. Como $A = 0$ tampoco es una opción, se concluye que $A = 6$ es la única respuesta. □

Problema 2. Vamos a usar la idea de los bloques mencionados en el artículo inicial.

El mayor número que divide a N y 45 es 15. Esto quiere decir que N debe contener un bloque 3 y un bloque 5, para que 15 lo divida, pero dado que $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, deducimos que N no puede contener otro bloque 3.

Por otro lado $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ es el número más pequeño que contiene a N y a $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Dado que 18 solo necesita un bloque 2 para cubrirlo, quiere decir que N debe tener dos bloques 2 (de lo contrario no haría falta dos de ellos para cubrir a N y 18).

Finalmente, N debe tener un bloque 5, pues de lo contrario no sería necesario para cubrir a N y 18 puesto que 18 no contiene bloques 5.

Concluimos entonces que $N = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. □

Problema 3. Si a es un número tal que $33a$ es tartamudo, $33a$ es múltiplode 11 y al estar formado solo por unos, necesariamente tendrá una cantidad par de cifras, por el criterio de divisibilidad por 11. Esto nos dice que únicamente tenemos que considerar $11, 1111, 111111$ como posibles respuestas. Pero $33a$ también es múltiplo de 3, por lo que la única posibilidad es 111111 que se obtiene cuando $a = 3367$.

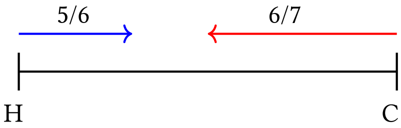
Problema 4. Cuando en las decenas está 1, basta con que el número sea múltiplo de la cifra de unidades. Las únicas posibilidades son $12, 15$

Luego, si en las decenas está 2, el número es par, por lo que las opciones son $22, 24, 26, 28$ de las cualesúnicamente 22 y 24 nos sirven.

Un razonamiento similar aplica en el caso de que las decenas sean 3, cuando sólo se obtiene 33 y 36.

Cuando en las decenas tenemos 4, las opciones son: 44 y 48, y si tenemos 5, sólo 55 es válido. De manera similar, en las opciones restantes obtendremos : $66, 77, 88$ y 99.

En total hubo 13 números.

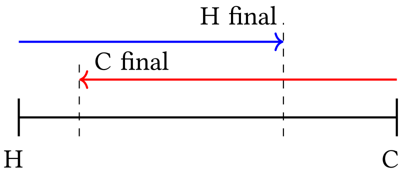


Problema 5. Hagamos un diagrama:

Si al total restamos $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{7}$, para saber cuánto quedá entre ellos; obtenemos:

$$1 - \frac{5}{6} - \frac{6}{7} = -\frac{29}{42}$$

El valor negativo es desconcertante, pero si notamos que $\frac{5}{6} + \frac{6}{7}$ es mayor que 1, quiere decir que ambos se cruzaron en su recorrido:



La distancia que queda entre ellos es

$$\frac{5}{6} + \frac{6}{7} - 1 = \frac{29}{42}$$

Así, $\frac{29}{42}$ del tubo corresponde a 145 cm y por tanto, el tubo completo mide:

$$\frac{145 \times 42}{29} = 210\,\text{cm}\,.$$

$\square$

Problema 6. Los números que debemos sumar son $1009, 1019, 1029, 1039, \ldots, 2019$.

Si descomponemos esos números como:

$$100 \cdot 10 + 9, 101 \cdot 10 + 9, 102 \cdot 10 + 9, \ldots, 201 \cdot 10 + 9,$$

en la cual hay $201 - 99 = 102$ sumandos, podemos hacer una factorización y reescribir como

$$10(100 + 101 + \cdots + 201) + 9 \cdot 102.$$

Finalmente, la suma $100+101+102+\cdots+201$ la podemos calcular como la diferencia entre la suma de Gauss que termina en 201 menos la que termina en 99:

$$\frac{201 \cdot 202}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2} = 20301 - 4950 = 15351.$$

Concluimos que la suma buscada es igual a

$$10 \cdot 15351 + 9 \cdot 102 = 153510 + 918 = 154428.$$

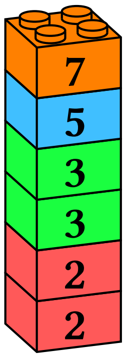
Problema 7. Aunque una forma de intentar la solución consiste en tratar de hacer una lista de números que tienen el 5, vamos a mostrar otro punto de vista, contando cuántas veces aparece el 5 según su posición, es decir, como centenas, decenas o unidades.

En la posición de centenas aparece 100 veces entre 500 y 599, y 100 veces más entre 1500 y 1599. Por tanto aparece 200 veces en la posición de las centenas.

En la posición de las decenas aparece 10 veces de 50 a 59, 10 veces de 150 a 159, 10 veces de 250 a 259, y así sucesivamente hasta 1950 a 1959, resultando en 20 grupos de 10, es decir, 200 veces como decena.

En las unidades aparece una vez en cada grupo de 10 números, por lo que hasta 2020 habrá aparecido 202 veces. Por tanto, el total de veces que aparece es $200 + 200 + 202 = 602$ veces.

Problema 8. Factorizando para aplicar la visualización de bloques, tenemos que 1260 es:



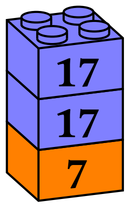
1260

Como cada uno de los números es múltiplo de 6, quiere decir que ambos usan un bloque de 2 y otro de 3 y solo necesitamos repartir los bloques 5 y 7. Sin embargo, poner ambos bloques en una misma torre haría que los números fueran 210y 6, lo cual no es una respuesta válida ya que deben ser números de dos cifras.

Entonces la única posibilidad es poner los bloques 5 y 7 en torres separadas, obteniendo $6 \cdot 5 = 30$ y $6 \cdot 7 = 42$. Por tanto, la respuesta es $30 + 42 = 72$.

Problema 9. Todos los números de la lista son de la forma $1 + kd$, por lo que si $1 + kd = 2024$, entonces $kd = 2023$. Esto quiere decir que la cantidad de posibilidades es igual a la cantidad de divisores de 2023. Como

podemos aplicar la fórmula del artículo para concluir que hay $2 \cdot 3 = 6$ posibilidades para d.



2023

Problema 10. Antes de calcular, observemos que en la lista habrá $\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$ palabras, debido a que son seis letras pero tres de ellas están repetidas.

Si ponemos todas las palabras en orden alfabético, al inicio todas comenzarán con la letra E. ¿Cuántas de estas habrá? Tantas como ordenamientos de F, M, M, M, O, que por la fórmula de permutación con repeticiones, es $\frac{5!}{3!} = 20$. Un argumento similar nos dice que hay 20 palabras que empiezan con la letra F.

Por otro lado, debe haber 20 palabras que comienzan con O, las últimas de la lista. Entonces $OEFMMM$ sería la palabra número 101 de la lista (las palabras que empiezan con O son las palabras en posiciones de la 101 a la 120). Necesitamos retroceder 11 posiciones, que serían las últimas 10 posiciones que empiezan con M.

Si retrocedemos en el orden alfabético encontramos en las posiciones 100, 99, 98, 97, 96:

$$MOMMFE, MOMMEF, MOMFME, MOMFEM, MOMEMF,$$

en las posiciones 95, 94, 93, 92, 91 tenemos:

$$MOMEFM, MOFMME, MOFMEM, MOFEMM, MOEMMF,$$

y por tanto la posición 90 será $MOEMFM$.

Problema 11. Observemos que $2b + 2b^2 = 2b(1 + b)$, y que $b(1 + b)$ es par, de modo que $2b + 2b^2$ es múltiplo de 4. Entonces si reacomodamos la expresión del problema como $2b + 2b^2 = 2023 - a^2$, concluimos que el lado derecho es un múltiplo de 4, por tanto $2023 \equiv a^2 \pmod{4}$. Pero $2023 \equiv 3 \pmod{4}$, pero 3 no es un residuo cuadrático módulo 4 (es decir, ningún número al cuadrado deja residuo 3), por lo que podemos concluir que dicha ecuación no tiene soluciones.

Problema 12. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ las cantidades de fichas en cada una de las pilas. Si denotamos por S la cantidad de todas las fichas en la mesa, la condición del problema es equivalente a que todos los números

$$S - a_1, S - a_2, S - a_3, \ldots, S - a_{2024},$$

son múltiplos de 3. Ello quiere decir que al sumarlos todos también obtendremos un múltiplo de 3. Sin embargo, la suma de todos ellos es:

$$2024S - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024}) = 2024S - S = 2023S.$$

Como 2023 y 3 son primos relativos, y 3 divide a $2023S$, concluimos que 3 divide a S.

Problema 13. Supongamos que los tres números iniciales son A, B, C y que no son iguales (por claridad en la exposición supondremos que son distintos, aunque el argumento que describiremos funciona independiemente de dicha suposición).

Los podemos incluso visualizar sobre una recta numérica. Vamos a pensar que A es el que está a la izquierda, B en medio y C a la derecha (es decir, $A < B < C$). Cuando calculamos el promedio de dos números, éste queda en el punto medio del segmento. Por ello, cuando calculemos $(A+B)/2, (B+C)/2, (C+A)/2$, si los colocamos en la recta numérica, quedarán dentro de la zona delimitada por A y C (es imposible que caigan fuera).

Podemos ser incluso un poco más finos: dado que $A+B < A+C$ y $A+C < B+C$, sus mitades quedan en el mismo orden, y por lo tanto $(A+B)/2$ es el promedio que queda a la izquierda, $(A+C)/2$ el promedio que queda en medio y $(B+C)/2$ el que queda a la derecha.

Nos preguntamos ¿qué tan separados pueden quedar esos tres promedios? En los originales, A, B, C, la mayor distancia es la que hay entre A y C, y es igual a $C-A$. En los promedios, la mayor distancia es la que hay entre el de la derecha y el de la izquierda, es decir:

$$\left(\frac{B+C}{2}\right) - \left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{C-A}{2}.$$

En otras palabras, cada vez que se hace el cambio de los números, la distancia entre los extremos se reduce a la mitad. Como el cambio se hace 11 veces, la máxima distancia al final es

$$\frac{C-A}{2^{11}}.$$

Pero C, A son dos números más pequeños que 2024, mientras que $2^1 1$ es 2048, por lo que al cabo de 11 días, es imposible que los promedios estén separados por 1 o más, y dado que son enteros, ello querría decir que los promedios finales son iguales. En otras palabras que la máxima distancia entre ellos es cero.

Así, se cumple que:

$$\frac{C-A}{2^{11}} = 0,$$

lo cual solo puede suceder si $C - A = 0$, y eso significaría que de los tres números iniciales, el menor es igual al mayor, y por tanto los tres son iguales.

Problema 14. Una forma común de atacar este problema, consiste en separar en casos (por ejemplo, dependiendo del número de cifras, o dependiendo de la cifra inicial, etc.). Sin embargo, vamos a presentar una solución diferente para ilustrar una técnica útil y común en la olimpiada de matemáticas: contar con separadores.

Vamos a suponer que tenemos 6 fichas, digamos $\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$ y vamos a separarlas en 4 grupos. POr ejemplo, $\bullet\bullet|\bullet|\bullet|\bullet\bullet$. Esa separación, la podemos identificar con el número 2112, si nos fijamos en la cantidad de fichas en cada grupo.

Otro ejemplo: $\bullet\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet$ representa a 3012. Quizás parezca que sólo podemos obtener números de cuatro cifras, pero esto no es así, dado que $|\bullet\bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet$ corresponde, contando cada grupo a 0312, es decir 312. Cualquier número que tenga, como máximo 4 cifras que sumen 6, puede obtenerse de esta forma. Así, 5001 es $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|||\bullet$, 24 es $||\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet$ y 6 sería $|||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$.

Puede parecer que nos estamos complicando mucho, ya que ¿no es más complicado contar todas las posibles formas de separar las fichas? En este momento llega la observación crucial: todos los ejemplos anteriores están formados por seis fichas $\bullet$ y tres separadores $|$. Como cada número corresponde a una forma de separar y viceversa, simplemente debemos contar la cantidad de maneras de colocar nueve "símbolos" de los cuales seis son $\bullet$ y tres son $|$. Pero este es un problema conocido de combintoria, con lo que llegamos a la solución

$$\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Problema 15. Notemos que moverse hacia la izquierda corresponde a *aumentar* el valor de la posición y moverse hacia la derecha disminuirlo, excepto si se está en el 1 y se mueve a la derecha, entonces obtenemos 20.

Entonces, la posición final, corresponde a la posición módulo 20 congruente a:

$$1 + 1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1 + 4 - 1 + \cdots + 1012 - 1.$$

Hay varias maneras de realizar la suma anterior, pero observemos que es equivalente a:

$$1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + 1012) - 1 - 1 - \cdots - 1 = 1 + \frac{1012 \cdot 1013}{2} - 1012 = 10244145,$$

y al tomar módulo 20 concluimos que la posición final es l 5, a quien le tocará ser el asesino.

Problemas de entrenamiento (Año 2024, No. 1)

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este primer número del año 2024. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la cuarta entrega de 2024 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de octubre de 2024**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista pueden enviarse por *email* a `revistaomm@gmail.com`. ¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si d es un número entero positivo que divide tanto a $n^2 + 1$ como a $(n+1)^2 + 1$ entonces $d = 1$ o $d = 5$.

Problema 2. Una persona divide mentalmente 2024 por $1, 2, 3, \ldots$, y así sucesivamente hasta llegar al 1000 y apunta en una hoja en blanco el resto que va obteniendo en cada una de esas divisiones. ¿Cuál es el mayor de los números que la persona anota?

Problema 3. La asociación “Defendamos El Cerro Chuperio” tiene 50 integrantes. El sábado cada uno de los integrantes presentes plantó 17 árboles y el domingo cada uno de los integrantes presentes plantó 20 árboles. En total se plantaron 1545 árboles. ¿Cuántos de los miembros de la asociación asistieron tanto el sábado como el domingo?

Problema 4. Decimos que $n \in \mathbb{Z}^+$ es un número de Markov si existen $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ tales que

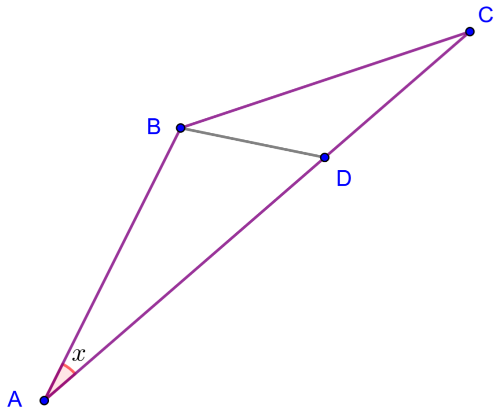
$$x^2 + y^2 + z^2 = nxyz. \tag{1}$$

Claramente, 3 es un número de Markov. Demuestre que ningún número mayor que 4 es un número de Markov.

Problema 5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $u \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $u \mid ac$, $u \mid ad + bc$ y $u \mid bd$, entonces $u \mid ad$ y $u \mid bc$.

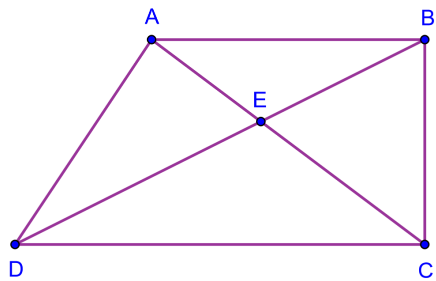
Problema 6. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si α y β son números enteros de la forma $X^2 + mXY + nY^2$, entonces $\alpha \cdot \beta$ es otro número de esa forma.

Problema 7. Considere la siguiente figura (a manera de referencia). Si en el triángulo ABC, D es un punto sobre el lado AC tal que $\measuredangle$ ABD = 105°, $\measuredangle$ DBC = 30° y AD = DC, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle$ BAC?



Problema 8. Supóngase que, en un triángulo ABC, el ángulo en B mide 120°. Si E es el punto donde la bisectriz del ángulo B se interseca con el lado AC y D es el punto donde la bisectriz del ángulo C se interseca con el lado AB, ¿cuál es la medida del ángulo CDE?

Problema 9. En el cuadrilátero ABCD que se presenta a continuación se cumple que AB $\parallel$ DC, $\measuredangle$ ABC = 90°, BC = 3 y que (CDE) = (ABE) + 6. Calcule la longitud del lado DA del cuadrilátero.



Nota. La notación (MNP) denota al área del triángulo de vértices M, N y P.

Problema 10. Alicia tenía una cuarta parte de la edad que hoy tiene su padre cuando su padre tenía la edad que hoy tiene Alicia. Hace un número entero de años, el padre tenía ocho veces los años que tenía Alicia cuando el padre tenía la edad que Alicia tenía entonces. ¿Cuántos años tienen Alicia y su padre actualmente?

Soluciones a los problemas de entrenamiento (año 2023, no. 2)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la segunda entrega de 2023 de Tzaloa. En esta ocasión, agradecemos a Titu Zvonaru de Comăneşti, Rumania por haber enviado soluciones al problema 2 de esa lista; por otra parte, reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente.

Problema 1. Determine el menor número entero positivo n tal que, cuando 3^n se escribe en base 143, sus últimos dos dígitos de la derecha son 01.

Solución. Supongamos que la representación de 3^n en base 143 es $a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_2 01$. Esto quiere decir que m es un número entero mayor que o igual a 3 y que $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_2$ son números enteros del intervalo $[0, 142]$ tales que

$$\begin{aligned} 3^n &= a_{m-1}\cdot 143^{m-1} + a_{m-2}\cdot 143^{m-2} + \cdots + a_2\cdot 143^2 + 0\cdot 143 + 1 \\ &= 143^2(a_{m-1}\cdot 143^{m-3} + a_{m-2}\cdot 143^{m-4} + \cdots + a_2) + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Como la expresión en (2) es congruente con 1 módulo 143^2, el problema es equivalente a determinar el menor número entero positivo n tal que

$$3^n \equiv 1 \pmod{143^2}.$$

En vista de que $143^2 = 11^2\cdot 13^2$ y $\operatorname{mcd}(11^2, 13^2) = 1$, hay que hallar el menor número entero positivo n tal que

$$3^n \equiv 1 \pmod{11^2} \tag{3}$$

y

$$3^n \equiv 1 \pmod{13^2}. \tag{4}$$

Puesto que $3^1 \equiv 3 \pmod{11^2}$, $3^2 \equiv 9 \pmod{11^2}$, $3^3 \equiv 27 \pmod{11^2}$, $3^4 \equiv 81 \pmod{11^2}$ y $3^5 \equiv 1 \pmod{11^2}$, se desprende que la congruencia en (3) se cumple si y sólo si $5 \mid n$. Ahora bien, en vista de que $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ se sigue que para el cumplimiento de la congruencia en (4) es necesario que $3 \mid n$. En consecuencia, para detectar el menor número entero positivo n tal que $3^n \equiv 1 \pmod{13^2}$, hay que expresar n como $3k$ y determinar cuáles son aquellos $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $3^{3k} \equiv 1 \pmod{13^2}$. Del teorema del binomio se tiene que

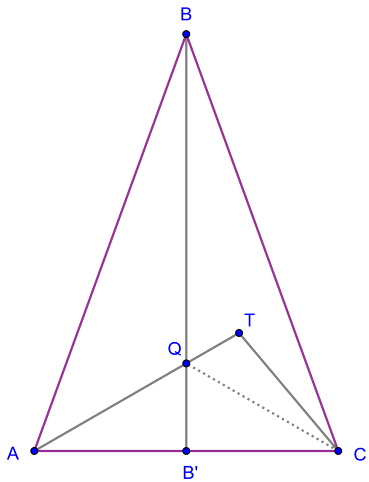
$$3^{3k} = (26+1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 26^{k-\ell}. \tag{5}$$

Como $26 = 2 \cdot 13$, entonces $26^j \equiv 0 \pmod{13^2}$ para cada $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$; de esta observación y (5) se obtiene que $3^{3k} \equiv 26k + 1 \pmod{13^2}$. Puesto que lo que se requiere es que $3^{3k} \equiv 1 \pmod{13^2}$, entonces $26k+1$ ha de ser congruente con 1 módulo 13^2: claramente esto ocurre si y sólo si $13 \mid k$.

De todo lo anterior se colige que si un número entero n satisface lo solicitado entonces es múltiplo de 5, 3 y 13; en consecuencia, el menor valor posible para n es $\operatorname{mcm}(5, 3, 13) = 195$. □

Problema 2. En un triángulo isósceles ABC con AB = BC, sea T un punto en el interior de $\triangle$ABC tal que $\measuredangle$BAT = 40°, $\measuredangle$TAC = 30° y $\measuredangle$BCT = 20°. Determine la medida del ángulo CBT.

Solución. Tracemos la altura de $\triangle$ABC que sale del vértice B. Denotemos con B′ al pie de esa altura y con Q a la intersección de BB′ con AT.



En vista de que $\measuredangle \mathrm{BAC} = \measuredangle \mathrm{BAT} + \measuredangle \mathrm{TAC} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$ y que $\measuredangle \mathrm{BB'A} = 90^\circ$ se sigue que $\measuredangle AQB' = 60^\circ$. Por otra parte, al tenerse que AB′ = B′C, es posible invocar el criterio de congruencia LAL y garantizar que $\triangle \mathrm{AQB'} \cong \triangle \mathrm{CQB'}$. Se tiene así que $\measuredangle \mathrm{CQB'} = 60^\circ$ y, por consiguiente,

$$\measuredangle \mathrm{TQC} = 180^\circ - \measuredangle \mathrm{BQT} - \measuredangle \mathrm{CQB'} = 180^\circ - \measuredangle \mathrm{AQB'} - 60^\circ = 60^\circ.$$

De lo anterior se desprende que el segmento QT yace sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle BQC$. Ahora bien, al tenerse que $\measuredangle \mathrm{BCT} = 20^\circ$ y que

$$\measuredangle \mathrm{TCQ} = \measuredangle \mathrm{BCA} - \measuredangle \mathrm{BCT} - \measuredangle \mathrm{QCA} = 70^\circ - 20^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$

se llega a que CT yace sobre la bisectriz del ángulo BCQ. Tenemos así que T es el incentro de $\triangle$ BQC y, en consecuencia,

$$\measuredangle \mathrm{CBT} = \frac{1}{2}\measuredangle \mathrm{CBQ} = \frac{1}{2}(20^\circ) = 10^\circ.$$

$\square$

Problema 3. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. En un pizarrón se escriben los números enteros del intervalo $[1, 2n]$. Demuestre que, siempre que se marquen $n+1$ números de entre los números que se escribieron en el pizarrón, hay un par de números marcados en el que uno de ellos divide al otro.

Solución. Para cada número $x \in [1, 2n]$ existe un único número entero no negativo α y un único número impar $\mathcal{Q} \in [1, n]$ tal que $x = 2^\alpha \cdot \mathcal{Q}$; al número $\mathcal{Q}$ en esa representación de x le diremos *la parte impar del número x.*

Al marcar $n + 1$ números enteros del intervalo $[1, n]$ y representar a cada uno de ellos en la forma $2^\alpha \cdot \mathcal{Q}$, habrá dos números con la misma parte impar $\mathcal{Q}$ (pues sólo hay n posibilidades para $\mathcal{Q}$); resulta claro que el menor de esos dos números será un divisor del mayor. $\square$

Problema 4. Diremos que dos números enteros positivos a y b son *hermanos* si existe un número primo p tal que $a = p \cdot b$ o $b = p \cdot a$. Diremos que un número entero positivo n es *familiar* si tiene al menos tres divisores positivos y todos sus divisores se pueden acomodar en un círculo de tal forma que cualesquiera dos divisores vecinos en el círculo sean hermanos. Determine todos los números enteros que son familiares.

Solución. Primero, como n tiene al menos tres divisores positivos, no es primo. Además, como 1 es divisor de cualquier entero, y 1 no es de la forma $p \cdot x$ para algún entero positivo x y primo p, entonces sus dos vecinos a y b son de la forma $a = p_1 \cdot 1$ y $b = p_2 \cdot 1$ con p_1 y p_2 primos. Pero los divisores de n aparecen en el círculo sin repeticiones, por lo que $p_1 \neq p_2$, de donde se sigue que n no es de la forma p^k para algún primo p y entero positivo k.

Luego, si n es cuadrado perfecto, entonces tiene un número impar de divisores. Supongamos que es posible acomodarlos en el círculo de manera que satisfaga las condiciones del problema, y factoricemos en primos cada divisor en el círculo. Recorramos los divisores en el círculo, en sentido horario, comenzando en 1. Como dos divisores vecinos son hermanos, entonces uno es un múltiplo primo del otro, por lo que la suma de los exponentes de cada primo en la factorización en primos aumenta o disminuye en 1 en cada salto, en particular, cambia su paridad. Pero n tiene un número impar de divisores, así que, tras un número impar de saltos, regresamos al 1. Pero la paridad de la suma de los exponentes cambia un número impar de veces, llegando a que la suma de los exponentes en la factorización en primos de n es impar, lo cual es un absurdo. Es decir, n no puede ser cuadrado perfecto.

Probaremos a continuación que todos los demás enteros positivos son familiares. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, con al menos uno de α_1, α_2 impar. Consideremos la siguiente tabla.

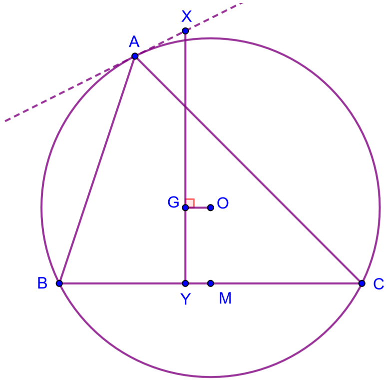
1	p_1	p_1^2	p_1^3	$\cdots$	$p_1^{\alpha_1}$
p_2	$p_1 p_2$	$p_1^2 p_2$	$p_1^3 p_2$	$\cdots$	$p_1^{\alpha_1} p_2$
p_2^2	$p_1 p_2^2$	$p_1^2 p_2^2$	$p_1^3 p_2^2$	$\cdots$	$p_1^{\alpha_1} p_2^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_2^{\alpha_2-1}$	$p_1 p_2^{\alpha_2-1}$	$p_1^2 p_2^{\alpha_2-1}$	$p_1^3 p_2^{\alpha_2-1}$	$\cdots$	$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1}$
$p_2^{\alpha_2}$	$p_1 p_2^{\alpha_2}$	$p_1^2 p_2^{\alpha_2}$	$p_1^3 p_2^{\alpha_2}$	$\cdots$	$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$

El problema es equivalente a encontrar un ciclo hamiltoniano, considerando cada entrada de la tabla como un vértice, utilizando únicamente aristas que conecten entradas vecinas en la tabla.
Supongamos sin pérdida de generalidad que α_2 es impar. Entonces existe un camino comenzando en 1, pasando por todas las entradas de la primera columna hasta $p_2^{\alpha_2}$, luego recorrer todas las entradas en horizontal hasta $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Luego subir a $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2-1}$, avanzar en horizontal hasta $p_1 p_2^{\alpha_2-1}$, subir a $p_1 p_2^{\alpha_2-2}$, y así sucesivamente. Como α_2 es impar, el camino termina en $p_1 p_2^0 = p_1$, por lo que puede regresar a 1, completando el ciclo.
Procediendo por inducción, supongamos que n es familiar. Se probará que $n \cdot p^\alpha$ con $p \nmid n$ también es familiar. Para ello, sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ los divisores de n ordenados de manera válida en el círculo en sentido horario, y sea p un primo tal que $p \nmid n$. Notemos que la secuencia

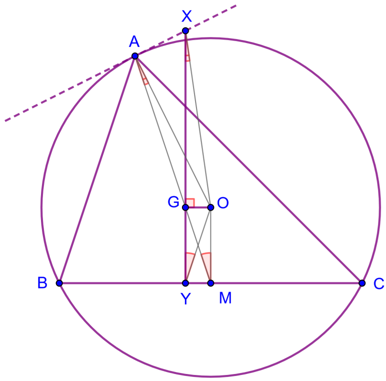
$$d_1, pd_1, p^2 d_1, \ldots, p^\alpha d_1, p^\alpha d_2, p^{\alpha-1} d_2, \ldots, pd_2, d_2, d_3, pd_3 \ldots, pd_k, d_k$$

forma un acomodo válido en el círculo, por lo que $n \cdot p^\alpha$ es familiar.
Por lo tanto, los enteros familiares son todos los enteros positivos que no son cuadrados perfectos ni potencias de primos. □

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O y baricentro G. Sea X el punto de intersección de la perpendicular a GO que pasa por G y la tangente por A al circuncírculo de ABC. Sea Y el punto de intersección de XG con BC. Si $\measuredangle ABC : \measuredangle BCA : \measuredangle XOY = 13 : 2 : 17$, determine la medida del ángulo BAC.



Solución. Pongamos $\measuredangle\,\mathrm{ABC} = 13x$, $\measuredangle\,\mathrm{BCA} = 2x$ y $\measuredangle\,\mathrm{XOY} = 17x$. Denotemos con M al punto medio del lado BC del triángulo ABC. Observemos que $\mathrm{OM} \perp \mathrm{BC}$ y que A, G y M son colineales. Puesto que OA es un radio del circuncírculo de ABC se cumple que $\measuredangle\,\mathrm{OAX} = \measuredangle\,\mathrm{OGX} = 90^\circ$ y, en consecuencia, XAGO es un cuadrilátero cíclico. Por otra parte, de la colinealidad de X, G y Y y de la perpendicularidad de OM y BC se desprende que el cuadrilátero OGYM también es cíclico.



Considerando los cuadriláteros cíclicos XAGO y OGYM obtenemos que $\measuredangle\,\mathrm{GXO} = \measuredangle\,\mathrm{GAO}$ y que $\measuredangle\,\mathrm{OYG} = \measuredangle\,\mathrm{OMG}$. El criterio *AAA* de semejanza permite garantizar entonces que $\triangle\,\mathrm{AOM} \sim \triangle\,\mathrm{XOY}$.

Luego, al ser

$$\begin{aligned} 17x &= \measuredangle\,\mathrm{XOY} \\ &= \measuredangle\,\mathrm{AOM} \\ &= \measuredangle\,\mathrm{AOB} + \measuredangle\,\mathrm{BOM} \\ &= 2(\measuredangle\,\mathrm{ACB}) + \frac{1}{2}(\measuredangle\,\mathrm{BOC}) \\ &= 4x + \measuredangle\,\mathrm{BAC}, \end{aligned}$$

se sigue que $\measuredangle$ BAC $= 13x$. Puesto que $180^\circ = \measuredangle$ ABC$+\measuredangle$ BAC$+\measuredangle$ BCA $= 13x+13x+2x = 28x$ se desprende que $x = (45/7)^\circ$ y, en conclusión, $\measuredangle$ BAC $= 13(45/7)^\circ = (585/7)^\circ$. $\square$

Problema 6. Una parábola es la gráfica de una función de la forma ax^2+bx+c, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Demuestre que para cada conjunto finito de parábolas se puede hallar una parábola que no interseque a ninguna parábola del conjunto.

Solución. Notemos primero que el signo de a en la parábola $ax^2 + bx + c$ determina su dirección: si $a > 0$ se abre "hacia arriba" y si $a < 0$ se abre "hacia abajo".

Si todas las parábolas del conjunto abren hacia arriba, basta tomar una parábola que abra hacia abajo con un vértice por debajo de todos los vértices en el conjunto. De manera similar, si todas abrieran hacia abajo, basta tomar una parábola que abra hacia arriba con un vértice por arriba de todos los que hay en el conjunto. El problema surge cuando en el conjunto hay de ambos tipos de parábolas, ya que este argumento deja de ser aplicable.

Antes de hacer la prueba en el caso general consideraremos el siguiente resultado.

Lema. *Dada una parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ con $a > 0$, y un punto P_0 en su interior, existe una parábola $g(x) = px^2+qx+r$ con $p > 0$, vértice P_0, tal que $f(x)$ y $g(x)$ no tienen puntos en común.*

Observemos que podemos suponer que $P_0 = (0, l)$ porque si $P_0 = (k, l)$, hacemos el cambio de variable $x' = x - k$ que corresponde a una traslación horizontal y que coloca el punto P_0 en el eje de las ordenadas, cambiando también de manera apropiada la ecuación de $f(x)$. Dicha traslación no modifica la posición relativa del punto respecto de la curva.

Consideremos ahora cualquier parábola $h(x) = ux^2 + w$ que tenga vértice en $P = (0, t)$ y que también abra hacia arriba, como $f(x)$. Si la parábola $h(x)$ no interseca a la parábola $f(x)$, tomamos $g(x) = f(x)$ y terminamos. En caso contrario, supongamos que hay un punto (s, t) en común, lo cual significa que $f(s) = t = h(s)$ y por tanto $f(s) - h(s) = 0$. En otras palabras s es una solución de la ecuación cuadrática

$$f(x) - h(x) = (ax^2 + bx + c) - (ux^2 + v) = (a - u)x^2 + bx + (c - w) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Como s es una solución real, el discriminante de la ecuación anterior es no negativo:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = b^2 - 4(a - u)(c - w) = b^2 - 4(u - a)(w - c) \geq 0.$$

Notemos que $w = h(0)$ es precisamente la ordenada del punto P_0 y por tanto es mayor que $c = f(0)$ (una vez más, estamos suponiendo que ya efectuamos el cambio de coordenadas apropiado para que P_0 esté sobre el eje y), de manera que $w - c > 0$. Ahora, dejando fijos los valores a, b, c, w, podemos cambiar u por cualquier valor p estrictamente mayor que

$$\frac{b^2}{4(w - c)} + a$$

y al tomar $g(x) = px^2 + w$ el discriminante se vuelve negativo y la ecuación $g(x)$ obtenida no tiene ningún punto en común con $f(x)$ ya que $f(x) - g(x)$ no tiene soluciones reales. Deshaciendo la transformación de coordenadas nos dará una parábola (en el sistema de coordenadas original), satisfaciendo el lema.

Nota. La prueba formal anterior puede describirse de forma intuitiva como sigue: Dada una parábola $f(x)$ que abre hacia arriba y un punto P_0 en su interior, tomemos cualquier parábola que se abra hacia arriba con vértice en P_0. Si la nueva parábola interseca a $f(x)$, entonces la “cerramos” hasta que deje de hacerlo, ya que aumentar el coeficiente del término cuadrático en $ux^2 + v$ hace que la parábola se cierre cada vez más.

Para terminar la prueba del problema, necesitamos un segundo resultado.

Lema. Dado cualquier conjunto finito de parábolas que abren hacia arriba, la intersección de sus interiores no es vacía.

Sean $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ un conjunto finito de parábolas que abren hacia arriba. Sea $K > f_i(0)$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces $(0, K)$ está en el interior de todas las parábolas.

Consideremos ahora cualquier conjunto finito S de parábolas como se describe en el problema. Supongamos que lo podemos separar en dos subconjuntos no vacíos S^+ de parábolas que abren hacia arriba, y S^- de parábolas que abren hacia abajo.

Aplicando el segundo lema, podemos encontrar un punto P_0 que esté en la intersección de los interiores de todas las parábolas en S^+. Y aplicando repetidamente el primer lema, podemos construir una parábola $g(x)$ lo suficientemente cerrada para que no inteseque ninguna parábola de S^+. El problema es que podría intersecar a alguna parábola de S^-. Sin embargo, consideremos el vértice (u, v) de aquella parábola en S^- que tenga mayor ordenada, como en la observación inicial y traslademos $g(x)$ hacia arriba de modo que el nuevo vértice tenga una ordenada mayor a v, entonces esta última parábola tampoco interseca ninguna parábola en S^- y es la parábola buscada. $\square$

Problema 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, demuestre que

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

Solución. Cada factor del lado izquierdo es de la forma $\frac{1}{a_i^2} - 1 = \left(\frac{1}{a_i} - 1\right)\left(\frac{1}{a_i} + 1\right)$. Demostraremos en seguida que el producto de los factores de la forma $\frac{1}{a_i} - 1$ es mayor o igual que $(n-1)^n$ y que el producto de los factores de la forma $\frac{1}{a_i} + 1$ es mayor o igual que $(n+1)^n$.

Denotemos con k al producto $a_1 \cdots a_n$. Al considerar la hipótesis sobre la suma $a_1 + \cdots + a_n$ y la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética tenemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple que

$$1 - a_i = \sum_{j \neq i} a_j \geq (n-1)(k/a_i)^{1/(n-1)}$$

y

$$a_i + 1 = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_i \geq (n+1)(ka_i)^{1/(n+1)}.$$

A su vez, estas desigualdades implican que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1-a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{(n-1)(k/a_i)^{1/(n-1)}}{a_i} = \frac{(n-1)^n}{k} \prod_{i=1}^{n} (k/a_i)^{1/(n-1)} = (n-1)^n \tag{6}$$

y que

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1+a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{(n+1)(ka_i)^{1/(n+1)}}{a_i} = \frac{(n+1)^n}{k} \prod_{i=1}^{n} (ka_i)^{1/(n+1)} = (n+1)^n. \tag{7}$$

La conclusión deseada es una consecuencia directa de (6) y (7). □

Problema 8. Demuestre que si m y n son números enteros positivos, entonces 2023 no divide a $2^m + 3^n$.

Solución. Tenemos que $2023 = 7 \cdot 17^2$. En las siguientes tablas podemos ver los restos de las potencias de 3 en la división por 7 y por 17:

n	1	2	3	4	5	6
$3^n \pmod 7$	3	2	6	4	5	1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$3^n \pmod{17}$	3	9	10	13	5	15	11	16
n	9	10	11	12	13	14	15	16
$3^n \pmod{17}$	14	8	7	4	12	2	6	1

Considerando la información en esas tablas demostraremos que existe una infinidad de $k \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$3^k \equiv 2 \pmod{2023}. \tag{8}$$

La congruencia anterior se cumple si y sólo si $3^k \equiv 2 \pmod 7$ y $3^k \equiv 2 \pmod{17^2}$. Si la segunda congruencia ha de cumplirse entonces $3^k \equiv 2 \pmod{17}$; de esto y la información en la segunda tabla se sigue que k debe ser congruente con 14 módulo 16. Pongamos $k = 16n + 14$ (donde n es una variable que asume valores enteros). Puesto que

$3^{16} \equiv 171 \pmod{17^2}$, entonces $3^{16n} \equiv (17 \cdot 10 + 1)^n \pmod{17^2}$. Al analizar el desarrollo del binomio se llega a que $(17 \cdot 10 + 1)^n = 17^2 Q + 170n + 1$ para algún $Q \in \mathbb{Z}$ y, por ende,

$$3^{16n} \equiv 170n + 1 \pmod{17^2}.$$

Se tiene así que si $k = 16n + 14$ entonces

$$3^k = 3^{16n+14} \equiv (170n + 1)(3^{14}) \pmod{17^2}$$

lo cual se puede llevar a

$$3^k = 3^{16n+14} \equiv (170n + 1)(19) \pmod{17^2}$$

o bien a

$$3^k = 3^{16n+14} \equiv 51n + 19 \pmod{17^2}.$$

Luego, en vista de que $51n+19 \equiv 2 \pmod{17^2}$ si y sólo si $n \equiv 11 \pmod{17}$ tenemos que para que 3^k sea congruente con 2 módulo 17^2 basta con que k sea solución del sistema de congruencias

$$\begin{cases} k \equiv 3 & \pmod{17} \\ k \equiv 14 & \pmod{16} \end{cases}$$

El conjunto de números enteros positivos k que satisfacen este sistema de congruencias es

$$\mathcal{S} = \{190 + 17(16)(\kappa) : \ \kappa \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}.$$

Para que un número $k \in \mathcal{S}$ cumpla, adicionalmente, la congruencia $3^k \equiv 2 \pmod{7}$ entonces k debe elegirse de la forma

$$190 + 17(16)(6q + 2), \quad q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

o de la forma

$$190 + 17(16)(6q + 5), \quad q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Se ha establecido que la congruencia en (8) vale para una infinidad de números enteros positivos k.

Habiendo demostrado lo anterior procederemos a establecer la tesis del problema planteado mediante reducción al absurdo. Si $2023 \mid 2^m+3^n$ para algunos números enteros positivos m y n, entonces $2^m+3^n \equiv 0 \pmod{2023}$. Luego, si $k \in \mathbb{Z}^+$ es un número entero que satisface (8) y tal que $mk - n > 0$ entonces

$$3^{mk} + 3^n \equiv 0 \pmod{2023}$$

o bien

$$3^n(3^{mk-n} + 1) \equiv 0 \pmod{2023}.$$

De esta última congruencia se desprende que $3^{mk-n} \equiv 6 \pmod 7$ y que $3^{mk-n} \equiv 16 \pmod{17}$; al contrastar estas congruencias con la información en las tablas de los restos de las potencias de 3 en la división por 3 y por 17 llegamos por un lado a que

$$mk - n \equiv 3 \pmod 6$$

mientras que, por el otro,

$$mk - n \equiv 8 \pmod{16}.$$

De la penúltima congruencia se obtiene que $mk - n$ es un número impar y la última congruencia implica que $mk - n$ es un número par; se ha obtenido así un absurdo y la demostración termina. □

Problema 9. Una hormiga camina sobre la superficie de un cubo de lado 1. Se encuentra en un vértice y quiere moverse al vértice opuesto. ¿Cuál es la mínima distancia que debe caminar la hormiga? **Nota:** dos vértices son opuestos si son extremos de una diagonal del cubo que pasa por su centro.

Solución. Cada vértice es adyacente a exactamente tres caras. Entre las tres caras adyacentes a un vértice y al opuesto, hay 6 aristas en común, las cuales denominamos "aristas centrales". Cualquier camino de un vértice al opuesto ha de pasar por alguna arista central.

Consideramos un camino arbitrario de un vértice V al vértice opuesto W. Sea P alguna intersección del camino con una arista central ℓ. Recordamos que el camino más corto entre dos puntos sobre una superficie plana es la línea recta. V y P comparten una cara, al igual que W y P. Por ende, el camino recto de V a P, seguido del camino recto de P a W, tiene a lo más la distancia del original. Basta así con encontrar el más corto de este tipo de caminos.

Tomamos las dos caras que contienen a los puntos V, P, W y desplegamos el cubo de manera que ambas queden planas y adyacentes. Esto no cambia la distancia que la hormiga tendría que recorrer. Tras hacer esto, encontramos que la longitud del camino se minimiza cuando P es la intersección de la recta VW con ℓ. La longitud de este camino es la diagonal de un rectángulo de lados 1 y 2, esto es, $\sqrt{5}$. □

Problema 10. Determine el número de funciones $f\colon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(0) = 0$, $f(6) = 12$ y, para todo $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se cumple que

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|.$$

Solución. Tomando $x = n$ y $y = n - 1$, tenemos que $1 \leq |f(n) - f(n-1)| \leq 3$, es decir, dos números consecutivos difieren por al menos 1 y a lo más por 3. Como $f(0) = 0$, tenemos que $f(1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Similarmente, tomando $x = n$ y $y = n - 2$, obtenemos que $2 \leq |f(n) - f(n-2)| \leq 6$, por lo que $f(2) \in \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$. Notemos que f puede decrecer a lo más una vez, pues si f decrece dos o más veces, entonces $f(6) \leq 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 10$, lo que es una contradicción. Analicemos los casos en los que f decrece.

Caso 1: f nunca decrece. Supongamos que $1 \leq f(n) - f(n-1) \leq 3$ para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y que hay a diferencias de 1, b diferencias de 2 y c diferencias de 3. Entonces, $a + b + c = 6$ y $f(0) + a + 2b + 3c = f(6)$, esto es, $a + 2b + 3c = 12$. De estas dos ecuaciones se sigue que $a = c$ y $b + 2c = 6$. Tenemos entonces las siguientes posibilidades:

a	b	c	Combinaciones
0	6	0	$\frac{6!}{0!6!0!} = 1$
1	4	1	$\frac{6!}{1!4!1!} = 30$
2	2	2	$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$
3	0	3	$\frac{6!}{3!0!3!} = 20$

Por lo que en este caso hay $1 + 30 + 90 + 20 = 141$ posibilidades.

Caso 2: f decrece solo una vez. En este caso, existe un único $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que $-3 \leq f(n) - f(n-1) \leq -1$. Supongamos que $f(1) - f(0) = -1$, esto es, $f(1) = -1$. Como $1 \leq f(2) - f(1) \leq 3$, tenemos que $1 \leq f(2) + 1 \leq 3$, esto es, $f(2) \in \{0, 1, 2\}$. Pero $f(2) \in \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$, por lo que $f(2) = 2$.
Si $f(1) = -2$, como f decrece solo una vez, tenemos que f crece de 2 a 1, esto es, $f(2) - f(1) > 0$, por lo que $1 \leq f(2) + 2 \leq 3$. Luego, $-1 \leq f(2) \leq 1$, lo cual es imposible.
Si $f(1) = -3$, entonces $f(2) = -2$. Pero los saltos m'as grandes posibles son de 3, as'i que si $f(3) = -2 + 3 = 1$, $f(4) = 1 + 3 = 4$ y $f(5) = 4 + 3 = 7$, entonces $f(6) - f(5) = 12 - 7 = 5 > 3$, lo cual es imposible, ya que de $f(5)$ a $f(6)$ se requiere un salto mayor que 3. Por lo tanto, si $f(1) - f(0) < 0$, entonces $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$. Supongamos que en las tres posiciones restantes hay a diferencias de 1, b diferencias de 2 y c diferencias de 3. Como hay cuatro diferencias restantes, entonces $a + b + c = 4$, y $f(2) + a + 2b + 3c = f(6)$, es decir, $a + 2b + 3c = 10$. De estas dos ecuaciones se sigue que $b + 2c = 6$ y $a + b + c = 4$. Las únicas posibilidades son $(a, b, c) = (0, 2, 2), (1, 0, 3)$. En el caso $(a, b, c) = (0, 2, 2)$, se tienen $\frac{4!}{2!2!} = 6$ posibilidades y, en el caso $(a, b, c) = (1, 0, 3)$, se tienen $\frac{4!}{3!} = 4$ posibilidades, dando un total de $4 + 6 = 10$ posibilidades.
Análogamente, si $f(6) - f(5) < 0$, entonces $f(5) \in \{13, 14, 5\}$. Si $f(5) = 13$, entonces $f(4) \in \{10, 11, 12\}$, de donde $f(4) = 10$. Si $f(5) = 14$, entonces $f(4) \in \{11, 12, 13\}$, que es imposible, pues $2 \leq |f(6) - f(4)| \leq 6$. Finalmente, si $f(5) = 15$, entonces $f(4) \in \{12, 13, 14\}$. Como $2 \leq |f(6) - f(4)| \leq 6$, entonces $f(4) = 14$, lo cual es imposible, pues si $f(1) = 0 + 3$, $f(2) = 3 + 3 = 6$ y $f(3) = 6 + 3 = 9$, entonces $f(4) - f(3) = 5 > 3$, lo que es una contradicción. Luego, si $f(6) < f(5)$, entonces $f(5) = 13$ y $f(4) = 10$. Si en las tres posiciones restantes hay a diferencias de 1, b diferencias de 2 y c diferencias de 3, entonces llegamos nuevamente a que $a + b + c = 4$ y $a + 2b + 3c = 10$, es decir, hay 10 soluciones.

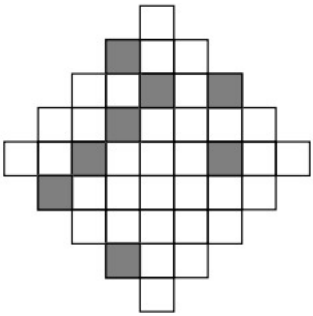
Por otra parte, supongamos que $f(n+1) < f(n)$ para algún $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $m = f(n)$. Como $f(n+1) < f(n)$ y $1 \leq f(n) - f(n+1) \leq 3$, tenemos que $f(n+1) \in \{m-1, m-2, m-3\}$. Similarmente, como $f(n-1) < f(n)$, tenemos que $f(n-1) \in \{m-1, m-2, m-3\}$. Pero $2 \leq f(n+1) - f(n-1)$, así que la única posibilidad es $f(n-1) = m-3$ y $f(n+1) = m-1$. Luego, como $1 \leq f(n+2) - f(n+1) \leq 3$, resulta que $f(n+2) \in \{m, m+1, m+2\}$. Pero $2 \leq f(n+2) - f(n)$, así que $f(n+2) = m+2$. De las seis diferencias, restan tres por determinar. Supongamos nuevamente que, de estas tres, a son de 1, b son de 2 y c son de 3. Como $f(n+2) - f(n-1) = m + 2 - (m-3) = 5$, tenemos que $a + 2b + 3c = 12 - 5 = 7$ y $a + b + c = 3$, de donde se sigue que $(a, b, c) = (0, 2, 1), (1, 0, 2)$. Para cada caso hay $\frac{3!}{2!} = 3$ posibilidades, por lo que hay 6 posibilidades por los dos casos. Luego, como $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tenemos $4 \cdot 6 = 24$ posibilidades.

Por lo tanto, en total hay $141 + 10 + 10 + 24 = 185$ funciones que satisfacen las condiciones del problema. $\square$

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica 2023

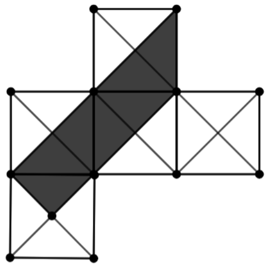
Examen individual - Nivel 1

Problema 1. ¿Cuál es la mínima cantidad de cuadrados adicionales que deben sombrearse para que la figura tenga un eje de simetría?



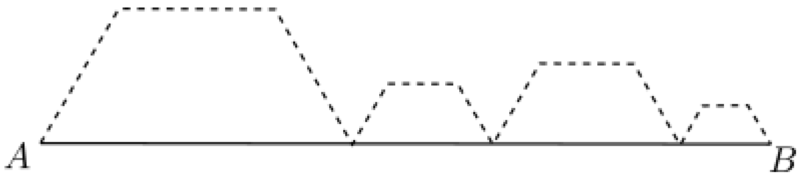
Problema 2. La multiplicación de los dígitos de un número natural es igual a 20. Si la suma de sus dígitos es 13, ¿cuál es el menor valor posible de dicho número?

Problema 3. La siguiente figura está compuesta por 5 cuadrados iguales y sus diagonales. Si la región sombreada tiene de área 21 cm^2. ¿Cuántos cm^2 tiene de área el área blanca de la figura?



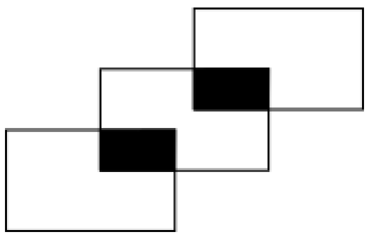
Problema 4. Un científico loco ha creado un rayo encogedor. Cada vez que dispara hacia un objeto, las dimensiones de éste disminuyen a un 25 % de las que se tenían antes del último disparo. El científico dispara el rayo 3 veces a un gran edificio, reduciendo su altura a 1 m. ¿Cuál era la altura original del edificio en metros?

Problema 5. Coahuila La recta AB parte a cuatro hexágonos regulares a la mitad. Si sabemos que la línea AB mide 36 cm, ¿cuántos centímetros mide la línea punteada?



Problema 6. Chiapas ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que al multiplicar cualesquiera dos cifras consecutivas el producto es par? (Por ejemplo, 827 cumple la propiedad porque $8 \times 2 = 16$ es par y también lo es $2 \times 7 = 14$).

Problema 7. Tabasco La figura muestra 3 rectángulos iguales (A, B, C) con dos rectángulos iguales dentro del rectángulo B. Dado que $\frac{2}{11}$ del rectángulo A está sombreado por el rectángulo negro, y que el área total de la figura es de $145\,\text{cm}^2$, ¿cuántos cm^2 mide el área de la región negra?

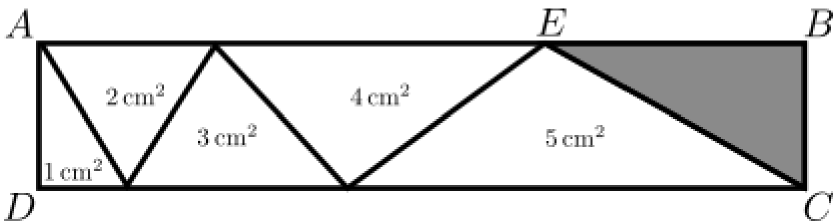


Problema 8. Querétaro La suma de 7 enteros positivos consecutivos es 2023. ¿Cuál es el número mayor de dichos enteros?

Problema 9. Chiapas En el trapecio isósceles $ABCD$ (con $AB \parallel CD$) la base mayor AB mide 50 cm y la base menor CD mide 30 cm. Además, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DAB$ miden 60°. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro del trapecio?

Problema 10. Colima ¿De cuántas maneras se pueden sentar alrededor de una mesa redonda 2 hombres y 3 mujeres, si los hombres no pueden estar juntos? (Nota: El mismo orden de personas pero rotado cuenta como el mismo acomodo).

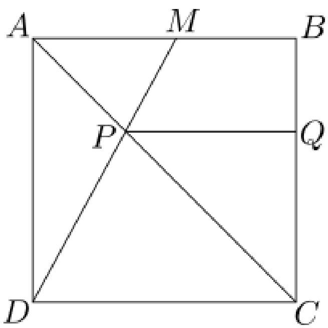
Problema 11. Yucatán Una tira de papel rectangular $ABCD$ se ha dividido en 6 triángulos, como se ve en la figura. Los cinco primeros triángulos tienen áreas 1 cm^2, 2 cm^2, 3 cm^2, 4 cm^2 y 5 cm^2, como se indica en la figura. ¿Cuántos cm^2 tiene de área el triángulo sombreado EBC?



Problema 12. Tabasco El número positivo $A222\ldots222B$ tiene 2004 dígitos (A y B son dígitos y todos los dígitos entre A y B son 2). Este número es divisible por 72. ¿Cuánto es el producto $A \times B$?

Problema 13. Jalisco Mi carro rinde en la ciudad 8 km/l, es decir, se gasta un litro en recorrer 8 kilómetros. En carretera, rinde 13 km/l. Si en un viaje, recorrí 115 kilómetros y me gasté 10 litros, ¿cuántos kilómetros recorrí en carretera?

Problema 14. Colima En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ de lado 24 cm; M es el punto medio de AB, P es el punto de intersección de AC con MD y Q es la intersección con BC de la paralela a DC desde P. ¿Cuánto vale el área del triángulo PQC en cm^2?



Problema 15. Jalisco La maquinita de chicles de burbulandia acepta monedas de 1 y de 7 pesos. Un chicle cuesta 3 pesos. Hay 2023 personas que quieren comprar los 2023

chicles que hay en la maquinita. La maquinita tiene 2023 monedas de 1 peso para dar cambio. ¿Cuántas personas como mínimo deben pagar con cambio exacto para que todas puedan comprar su chicle?

Soluciones a los problemas del examen individual de la OMMEB 2023, nivel 1.

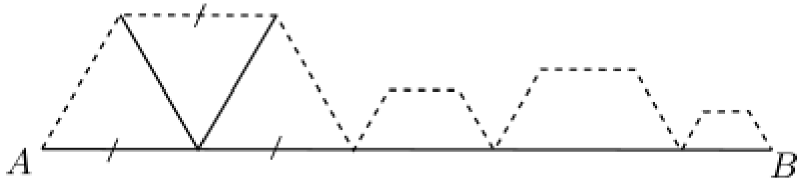
Problema 1. Si tomamos un eje a 45°, es posible que la figura sea simétrica con pintar tan solo 3 cuadrados.

Problema 2. Las únicas formas de escribir al número 20 como producto de dígitos son $20 = 4\times5$ y $20 = 2\times2\times5$, sin usar el dígito 1. Como se necesita que el número de dígitos sea lo menor posible, usamos los dígitos 4 y 5 y completamos con dígitos 1 para que la suma de los dígitos sea 13. Como $4 + 5 = 9$, debemos usar cuatro dígitos 1, formando el número 111145.

Problema 3. Las diagonales de cada cuadrado, lo dividen en 4 triángulos iguales. El área sombreada contiene 7 de esos triángulos y el área blanca contiene 13. El área de cada triángulo, es $\frac{1}{7}$ del área sombreada, por lo que cada triángulo tiene área $\frac{21}{7} = 3$ cm^2 y, el área blanca es igual a $3 \times 13 = 39$ cm^2.

Problema 4. Cada vez la altura se reduce una cuarta parte. Como el rayo se dispara 3 veces y $4\times4\times4 = 64$, la altura del edificio se redujo 64 veces. Luego, la altura del edificio era de $64 \times 1 = 64$ m.

Problema 5. La línea AB pasa por la mitad de cada uno de los hexágonos, por lo que cada fragmento de esta línea equivale a dos lados de cada hexágono, como podemos ver luego de formar internamente los triángulos equiláteros como se muestra a continuación.



Al ocupar 3 lados de cada hexágono, el recorrido punteado es $\frac{3}{2}$ de cada fragmento de la línea, por lo que es $\frac{3}{2}$ de AB, esto es, $\frac{3}{2} \times 36 = 54$ cm.

Problema 6. Las cifras pares pueden ser $0, 2, 4, 6, 8$, pero, al ser números de 3 cifras, no pueden empezar con 0. Las cifras impares pueden ser cualquiera de las siguientes cinco: 1, 3, 5, 7, 9. Los números que cumplen son de la forma:

- par- par- par, de los cuales hay $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.
- impar-par-par, de los cuales hay $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
- par-impar-par, de los cuales hay $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.
- par-par-impar, de los cuales hay $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.
- impar-par-impar, de los cuales hay $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Por lo tanto, la respuesta es $3 \times 100 + 2 \times 125 = 550$.

Problema 7. Al dividir los rectángulos A, B y C en 11 partes iguales cada uno, de manera que cada rectángulo negro quede dividido en 2 de estas partes, vemos que la región blanca de A consta de $11 - 2 = 9$ partes y lo mismo sucede con la región blanca de C. Entonces, la figura completa queda dividida en $9 + 11 + 9 = 29$ partes, de las cuales 4 son negras. Como la figura completa tiene 145 cm^2 de área, cada parte tiene $\frac{145}{29} = 5$ cm^2 de área, por lo que la parte negra tiene $4 \times 5 = 20$ cm^2 de área.

Problema 8. La suma de 7 enteros consecutivos es lo mismo que 7 veces el número central. El número central es $\frac{2023}{7} = 289$ y, por lo tanto, el mayor de los 7 enteros consecutivos es $289 + 3 = 292$.

Problema 9. Tracemos el rectángulo $ABEF$, con E y F sobre el lado CD del trapecio. Tenemos que ADF es la mitad de un triángulo equilátero y es claro que DF mide $\frac{50-30}{2} = 10$ cm. Luego, AD mide 20 cm y, el perímetro del trapecio $ABCD$, es igual a $50 + 30 + 20 + 20 = 120$ cm.

Problema 10. Numeremos a las sillas alrededor de la mesa, en orden. Como no se considera rotación, podemos suponer que uno de los hombres ya está ocupando la silla 1. El otro hombre puede quedar en cualquiera de las sillas 3 o 4 (2 posibilidades). Las formas de acomodar a las mujeres son $3 \times 2 \times 1 = 6$. Por lo tanto, el total de formas en que todos se pueden sentar alrededor de la mesa es igual a $2 \times 6 = 12$.

Problema 11. Primero observemos que los 6 triángulos comparten una misma altura, que es el ancho de la tira. Luego, la base del triángulo que tiene área 2 cm^2 es el doble de la base del triángulo que tiene área 1 cm^2; la base del triángulo que tiene área 3 cm^2 es el triple de la base del triángulo que tiene área 1 cm^2; etc. Como los dos lados horizontales miden lo mismo y $(1 + 3 + 5) - (2 + 4) = 3$, la base EB del triángulo EBC mide el triple que la del triángulo de área 1 cm^2. Luego, el área del triángulo EBC es igual a 3 cm^2.

Problema 12. Para que un número sea divisible por 72, debe ser divisible por 9 y por 8. El criterio de divisibilidad del 8 nos dice que es equivalente que un número sea divisible por 8 a que el número formado por sus últimos tres dígitos lo sea, así que $B = 4$ (pues 224 es divisible por 8).

Para determinar el valor de A, usaremos el criterio de divisibilidad del 9 que nos dice que la suma de los dígitos de un número debe ser múltiplo de 9 para que el número sea divisible por 9. Como $2002 \times 2 + 4 = 4008$ y $4 + 0 + 0 + 8 = 12$, concluimos que $A = 6$ y $A \times B = 6 \times 4 = 24$.

Problema 13. Si hubiera gastado 5 litros en ciudad y 5 litros en carretera, habría recorrido en ciudad $8 \times 5 + 13 \times 5 = 40 + 65 = 105$ kilómetros, así que debo haber gastado más litros en carretera.
Con 4 litros en ciudad y 6 en carretera, se recorren $8 \times 4 + 13 \times 6 = 110$ kilómetros.
Ahora, con 3 litros en ciudad y 7 en carretera, se recorren $8 \times 3 + 13 \times 7 = 24 + 91 = 115$ kilómetros. Por lo tanto, en carretera recorrí $13 \times 7 = 91$ kilómetros.

Problema 14. El triángulo CPQ es rectángulo y $\angle PCQ = 45^\circ$ (puesto que AC es diagonal del cuadrado). Entonces, CPQ es un triángulo isósceles con $PQ = QC$ y, por consiguiente, PQ mide lo mismo que la altura desde P del triángulo PDC. Ahora, como los triángulos PAM y PCD son semejantes y, AM mide la mitad de DC, tenemos que la razón de semejanza es $1 : 2$, que es la misma razón entre sus alturas desde P. Pero como estas alturas suman 24 cm, la altura desde P del triángulo PCD mide 16 cm (y en PMA mide 8 cm) y el área del triángulo PQC es $\frac{16\times16}{2} = 16 \times 8 = 128$ cm^2.

Problema 15. Al final habrá en la maquinita el dinero equivalente a 2023 chicles, más los 2023 pesos que ya tenía. Idealmente, no sobraría cambio, todo estaría en monedas de 7 pesos. Tenemos que

$$\frac{2023 \times 3 + 2023}{7} = 1156,$$

así que 1156 personas debieron meter su moneda de 7 pesos y recibir cambio. La respuesta es $2023 - 1156 = 867$ personas.
Podemos comprobar qué pasó exactamente con ese dinero. Cada una de las 867 personas metió 3 monedas de 1 peso que, junto con los 2023 pesos sueltos, se repartieron de 4 en 4 a las 1156 personas que metieron monedas de 7 pesos:

$$\frac{867 \times 3 + 2023}{4} = 1156.$$

Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (PAGMO) 2023 - Costa Rica

Problema 1. Un entero $n \geq 2$ se dice *tuanis* si al sumar el menor divisor primo de n y el mayor divisor primo de n (estos divisores pueden ser iguales), se obtiene un resultado impar. Calcular la suma de todos los número tuanis menores o iguales que 2023. *Nota: Por ejemplo, el 3 no es tuanis porque 3+3 es par.*

Solución oficial 1. Si $n = p^m$ con p primo y $m \geq 1$, entonces el mayor y el menor divisor son p y por ende n no es tuanis. Si 2 no divide a n, luego n tiene divisores primos impares p, q que son el máximo y el mínimo (pueden ser el mismo) y por ende $f(n) = p + q$ es par, por lo que n no es tuanis. Si n es par pero no es una potencia de 2, entonces su mayor divisor primo es impar, así al sumarlo con dos obtenemos un número impar por lo que n es tuanis. Concluimos que para todo n, n es tuanis si y sólo si $n = 2^m k$ con $k > 1$ impar, es decir es un número par que no es potencia de 2. Por ende debemos sumar todos los números pares que no son potencia de 2:

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2022 - (2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024)$$

$$S = 1011 \cdot 1012 - (2^{11} - 2) = 1021086$$

Solución oficial 2. Denote por p y q al menor y el mayor factor primo de n, respectivamente. Como $p + q$ es impar, entonces p y q tienen distinta paridad. De esto se concluye que uno de estos primos es par, y como el único primo par es 2 (y es el menor primo) entonces $p = 2$. Además, q es un primo impar.
Por lo tanto, n es *tuanis* si y sólo si es par, pero no una potencia de 2. En otras palabras, al escribir n de la forma $n = 2^m k$, con k impar, entonces $m \geq 1$ y $k \geq 3$.
Por ende debemos sumar todos los números pares que no son potencia de 2:

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2022 - (2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024)$$

$$S = 1011 \cdot 1012 - (2^{11} - 2) = 1021086$$

Problema 2. En cada casilla de una cuadrícula $n \times n$ se debe escribir alguno de los números 0, 1 o 2. Determinar todos los enteros positivos n para los cuales existe una forma de llenar la cuadrícula $n \times n$ tal que al calcular la suma de los números en cada fila y en cada columna se obtienen los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$, en algún orden.

Solución oficial 1. Denotemos por $f_1, f_2, \ldots, f_n$ y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las sumas sobre las filas y las columnas respectivamente. Entonces

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n = n(2n + 1).$$

Por otro lado, cada número de la cuadrícula se cuenta exactamente dos veces en la suma anterior por lo que $n(2n + 1)$ es par, es decir, n es par.

Sea ahora $n = 2k$. Demostremos que para cada $k \geq 2$ es posible cumplir la proposición anterior. Llenamos los primeros k cuadrados unitarios de la diagonal principal con 1, los últimos k cuadrados unitarios con 2. Rellenemos los cuadrados unitarios bajo la diagonal principal con 0 y los cuadrados unitarios por encima de la diagonal principal con 2. La suma de los elementos en las primeras k filas es $4k - 1, 4k - 2, \ldots, 2k + 1$ y en las últimas filas es $2k, 2k - 2, 2k - 4, \ldots, 2$. La suma de los elementos en las primeras k columnas es $1, 3, \ldots, 2k - 1$ y en las últimas k columnas es $2k + 2, 2k + 4, 2k + 6, \ldots, 4k$.

Solución oficial 2. Construimos inicialmente un grafo con $2n$ vértices, donde los primeros n representan a las n filas (vértices f_i) y los otros a las n columnas (vértices c_j) y colocamos 0,1 o 2 aristas entre el vértice f_i y c_j dependiendo del número en casilla ij. En el grafo los grados representan la suma total, que debe ser $1, 2, \ldots, 2n$, en algún orden.

Sabemos que la suma total de los grados es par, (pues es el doble de la cantidad de total de aristas), por lo tanto $1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$ es par, es decir, n es par.
El resto de la solución continúa como 1 o con inducción.

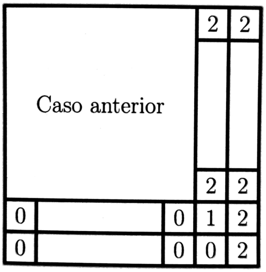
Solución oficial 3. (Inducciones) Procedemos por inducción.

Para $n = 2$ tenemos el tablero:

1	2
0	2

Para el paso inductivo, tomamos el tablero de tamaño $n \times n$ que verifica lo pedido y agregamos dos columnas a la izquierda y dos abajo, en las dos columnas a la izquierda colocamos solamente 2, en las dos filas abajo colocamos solamente cero (menos en el tablero de 2×2 más abajo izquierda) y en el tablero 2×2 más abajo izquierda lo llenamos como el caso inicial. Así nos queda la figura ilustrada en la siguiente página.

Observamos que las sumas 2,3 (mód 4) incrementaron en 4 pero las sumas de las últimas dos filas dan 2 y 3, que eran las sumas 2,3 (mód 4) que nos faltaban, las sumas 0,1 (mód 4) no cambiaron, pero las sumas de las últimas dos columnas nos da $2n+1, 2n+4$ que eran las sumas que nos faltaban.



Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. La recta EF y el circuncírculo de ABC se intersecan en P, de forma que F está entre E y P. Las rectas BP y DF se intersecan en Q. Demostrar que si $ED = EP$, entonces CQ y DP son paralelas.

Solución oficial 1. Tenemos que $\angle QDC = \angle FDC = 180 - \angle FAC = 180 - \angle BAC = 180 - \angle BPC = \angle QPC$ entonces el cuadrilátero $CDPQ$ es cíclico. Esto implica que $\angle BCQ = \angle BPD$.
Como la altura BE biseca al ángulo $\angle PED$ y $ED = EP$, entonces BE es la mediatriz del segmento PD. Esto implica que $\angle BDP = \angle BPD$, con lo cual concluimos que $\angle BCQ = \angle BDP$ y por lo tanto CQ y DP son paralelas.

Solución oficial 2. Al igual que en la solución anterior, empezamos demostrando que $CDPQ$ es cíclico. Sea $X = BC \cap EF$. Tenemos que $(X, D; B, C) = -1$ y $\angle BEC = 90$, entonces $\angle DEB = \angle BEP$. Usando que $EP = ED$, por el criterio LAL obtenemos que $\triangle BEP \cong \triangle BED$, por lo que $BP = BD$. Ahora, como $CDPQ$ es cíclico, lo anterior es suficiente para decir que $CDPQ$ es un trapecio isósceles, y por lo tanto $CQ || DP$ como se quería probar.
Comentario: El hecho que $CDPQ$ es cíclico es un resultado que no depende de la hipótesis del problema.
Comentario: A partir de la hipótesis $ED = EP$ se deduce que DP es paralela a BC, pues ambas son perpendiculares a BE. Por lo tanto, el problema se reduce a probar que Q pertenece ala recta AC; este resultado no es válido en general, es decir, no necesariamente se cumple sin la hipótesis del problema.

Solución oficial 3. Como BE es altura de $\triangle ABC$, entonces es bisectriz del triángulo órtico DEF, es decir, biseca el ángulo $\angle DEF$. Como $ED = EP$, concluimos que BE es mediatriz del segmento DP. Luego las rectas DP y AC son ambas perpendiculares a BE, y esto implica que son paralelas.
Para concluir el problema, sólo hace falta demostrar que Q, A,y C son colineales. Observe que, como los ángulos $\angle DPE$ y $\angle PEB$ son complementarios, entonces

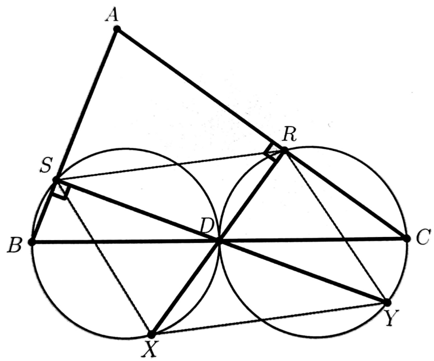
$$\angle DPE = 90 - \angle PEB = 90 - (90 - \angle B) = \angle B,$$

donde usamos $\angle B$ para denotar el ángulo $\angle ABC$, y utilizamos el resultado conocido de triángulos órticos que $\angle PEB = \angle FEB = 90 - \angle FEA = 90 - \angle B$. Como $\angle DPE = \angle B$, entonces el cuadrilátero $PBDF$ es cíclico. Sea Γ_1, el círculo que pasa por los puntos A, B, y C, Γ_2 el que pasa por los puntos P, B, D, y F, y Γ_3 el que pasa por A, F, D, y C (estos últimos son concíclicos porque $\angle AFC = \angle ADC = 90$). Entonces las rectas PB, DF, y AC son ejes radicales de los círculos Γ_1, Γ_2, y Γ_3 y por lo tanto concurren. Es decir, los puntos Q, A, y C son colineales, como se buscaba.

Sea H el ortocentro de ABC y X el punto de intersección de FD con BE. Tenemos los cuadriláteros cíclicos: $AFDC$, $AFHE$, $EHDC$, de ello $\angle HFE = \angle FAH = \angle HCD = \angle HED$ y $\angle BAC = \angle XDB = \angle BAC$ y dado que $BPAC$ es cíclico, entonces P, X y C son colineales. Como EB es eje de simetría de PD tenemos que PD es perpendicular a BE. Luego, Q y C son simétricos y QC es perpendiculares BE. Finalmente PD y QC son segmentos paralelos.

Problema 4. En un triángulo acutángulo ABC, D es un punto sobre el segmento BC. Sean R y S los pies de las perpendiculares desde D hasta AC y AB, respectivamente. La recta DR y el circuncírculo de BDS se intersecan en X, con $X \neq D$.
Análogamente, la recta DS y el circuncírculo de CDR se intersecan en Y, con $Y \neq D$. Demostrar que si XY es paralelo a RS, entonces D es el punto medio de BC.

Solución oficial 1.



Empezaremos probando que $\triangle BDS \sim \triangle CDY$ y $RY \| SX$. Usando que $CRDY$, $ARDS$, $BSDX$ son cíclicos obtenemos que $\angle CYD = \angle ARD = \angle BSD$. Adicionalmente, con la igualdad $\angle CDY = \angle SDB$ se obtiene la semejanza que buscamos; esto implica en particular que $\angle SBD = \angle DCY$.
Además,

$$\angle SXR = \angle SXD = \angle SBD = \angle DCY = \angle DRY = \angle XRY,$$

con lo cual concluimos el paralelismo buscado.
Ahora suponemos que RS es paralelo a XY. Por el paralelismo anterior obtenemos que $RSXY$ es un paralelogramo, y así $DS = DY$. Esta igualdad junto con la semejanza $\triangle BDS \sim \triangle CDY$ implica que los triángulos son congruentes, y por lo tanto $BD = CD$; es decir, D

es el punto medio de BC.
Conversamente, si D es el punto medio de BC, entonces $BD = CD$, y por lo tanto la semejanza $\triangle BDS \sim \triangle CDY$ implica que los triángulos son congruentes. Con esto obtenemos que $DS = DY$. Por el paralelismo de RY y SX tenemos que $\triangle DRY \sim \triangle DSX$; sin embargo, la igualdad $DS = DY$ implica que los triángulos son congruentes. Con esto obtenemos que RY y SX son paralelos y congruentes, por lo que $RSXY$ es un paralelogramo, y así concluimos que RS y XY son paralelos.
Comentario: La solución presentada solo usa el hecho que $ARDS$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 5. Determinar todas las parejas de números primos (p, q) tales que $6pq$ divide a

$$p^3 + q^2 + 38.$$

Solución oficial 1. Vamos a demostrar que las únicas parejas de primos (p, q) que cumplen son $(3, 5)$ y $(3, 13)$.
Como 3 divide a $6pq$, entonces 3 divide a $p^3 + q^2 + 2$. Vamos a considerar dos casos: $q = 3$ o $q \neq 3$.
Si $q = 3$, entonces p divide a $p^3 + q^2 + 38 = p^3 + 47$. Con esto obtenemos que p divide a 47, y así deducimos que $p = 47$. Sin embargo, podemos ver que 9 divide a $6pq$, pero no divide a $p^3 + q^2 + 38$, pues

$$47^3 + 3^2 + 38 \equiv 2^3 + 0 + 2 \equiv 1 \not\equiv 0 (\text{mód } 9).$$

Si $q \neq 3$, entonces 3 no divide a q y por lo tanto 3 divide a $q^2 + 2$. Esto implica que 3 divide a $p^3 = (p^3 + q^2 + 2) - (q^2 + 2)$. Con esto concluimos que 3 divide a p^3 y por lo tanto $p = 3$. De esta forma obtenemos que q divide a $p^3 + q^2 + 38 = q^2 + 65$, con lo cual q divide a $65 = 5 \cdot 13$. Esto implica que $q = 5$ p $q = 13$.
Con $p = 3$ y $q = 5$ tenemos que $6pq = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y

$$p^3 + q^2 + 38 = 5^2 + 65 = 5 \cdot (5 + 13) = 5 \cdot 2 \cdot 3^2.$$

Con $p = 3$ y $q = 13$ tenemos $6pq = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y

$$p^3 + q^2 + 38 = 13^2 + 65 = 13 \cdot (13 + 5) = 13 \cdot 2 \cdot 3^2.$$

Por lo tanto, en ambos se cumple la divisibilidad y así concluye el resultado.

Solución oficial 2. Si $q = 2$ entonces $12p | p^3 + 42$, lo que implica que $6 | p^3$ que no es posible. Si $q = 3$ entonces $18p | p^3 + 47$, lo que implica que $p | 47$, entonces $p = 47$. Sustituyendo en la condición anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} 18 \cdot 47 | 47(47^2 + 1) &\Rightarrow 18 | 47^2 + 1 \\ &\Rightarrow 0 \equiv 47^2 + 1 (\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow 0 \equiv (-1)^2 + 1 (\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow 0 \equiv 2 (\text{mód } 6) \end{aligned}$$

que tampoco es posible. Finalmente, si $q > 3$ entonces $q^2 \equiv 1(\text{mód } 6)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 \equiv p^3 + q^2 + 38(\text{mód } 6) \quad &\Rightarrow \quad 0 \equiv p^3 + 3(\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow \quad p^3 \equiv 3(\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow \quad p \equiv 3(\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow \quad p = 3. \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene que $18q|q^2 + 65$, lo que implica que $q|65 = 5\dot{1}3$. Si $p = 3$ y $q = 5$ se obtiene que $6 \cdot 15 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ que divide a $p^3 + q^2 + 38 = 5^2 + 65 = 5(5 + 13) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, y si $p = 3$ y $q = 13$ se obtiene que $6pq = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ que divide a $p^3 + q^2 + 38 = 13^2 + 65 = 13(13 + 5) = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

Solución oficial 3. Observe que $6pq|p^3 + q^2 + 38$ implica que $0 \equiv p^3 + q^2 + 2(\text{mód } 6)$. Si $p > 3$ entonces

$$\begin{aligned} q^2 + 2 \pm 1 \equiv 0(\text{mód } 6) \quad &\Rightarrow \quad q^2 \equiv 4 \pm 1(\text{mód } 6) \\ &\Rightarrow \quad q^2 \equiv 3(\text{mód } 6) \text{ ó } q^2 \equiv 5(\text{mód } 6), \end{aligned}$$

de dónde se obtiene que $q \leq 3$ y entonces $q = 3$. En este caso, análogamente a la solución oficial $p = 47$, no es solución. Por lo tanto, $p \leq 3$. Si $p = 2$ entonces $12q|q^2 + 46$, lo que implica que $4|q^2 + 2$, que no es posible. Por lo que $p = 3$. A partir de aquí la solución es igual a la oficial.

Problema 6. Sea $n \geq 2$ un entero. Lucía escoge n números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $|x_i - x_j| \geq 1$ para todo $i \neq j$. Luego, en cada una de las casillas de una cuadrícula $n \times n$, ella escribe alguno de estos números, de modo que no se repite ningún número en una misma fila o una misma columna. Finalmente, para cada casilla, ella calcula el valor absoluto de la diferencia del número de la casilla y el número en la primera casilla de su misma fila. Determinar el menor valor que puede tomar la suma de los n^2 números que Lucía calculó.

Solución oficial 1. Sea S la suma de los valores absolutos de las diferencias. Sea a_{ij} el número en la casilla (i, j), luego $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ es una permutación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Veamos que los números de la primera columna son una permutación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Luego

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i1} - a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$$

Como esta última expresión es simétrica, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Luego $1 \leq x_i - x_{i-1}$ para $i = 2, 3, \ldots, n$ y por ende para $j > i$, se tiene

$$|x_i - x_j| = x_j - x_i = (x_j - x_{j-1}) + (x_{j-1} - x_{j-2}) + \cdots + (x_{i+1} - x_i) \geq (j - i) = |i - j|.$$

Luego se tiene que

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\geq 1}^{n} |i - j|.$$

Basta hallar el valor de la doble suma del lado derecho

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(i(i-1)-\frac{i(i-1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}(i^2-i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n^3-n}{3}$$

Se concluye que

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j| \geq \frac{n^3-n}{3}.$$

Para este caso, la igualdad se cumple si y sólo si $x_j - x_i = (j-i)$ para $j > i$, es decir que los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ están en progresión aritmética con diferencia 1. Como inicialmente los números no están en orden ascendente, la igualdad se da si y sólo si $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una progresión aritmética con diferencia 1 no necesariamente en orden.

Solución oficial 2. Al igual que en la solución 1, obtenemos que $S = \sum\sum|x_i - x_j|$. Como esta última expresión es simétrica, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que los números están ordenados $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Consideremos el índice i. Usando el orden de los términos, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j| &= \sum_{j=1}^{i-1}(x_i-x_j) + \sum_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)\\ &= [(i-1)-(n-i)]x_i - (x_1+\cdots+x_{i-1}) + (x_{i+1}+\dots x_n)\\ &= (2i-n-1)x_i - (x_1+\cdots+x_{i-1}) + (x_{i+1}+\cdots+x_n);\end{aligned}$$

es decir, el término correspondiente al índice fijo contribuye $2i-n-1$ veces, los términos menores a x_i contribuyen -1 veces y los términos mayores a x_i con 1 vez. Con base en lo anterior, el coeficiente de x_k en $\sum\sum|x_i-x_j|$ es

$$(2k-n-1)-(n-k)+(k-1) = 2\cdot(2k-n-1),$$

por lo que $S = 2\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k$. Si $c(k) = 2k-n-1$, entonces vemos que $c(n+1-k) = -c(k)$.
Usando esta simetría obtenemos que

$$S = 2\sum_{k=1}^{n}c(k)x_k = \sum_{k=1}^{n}c(k)(x_k - x_{n+1-k}).$$

Con el orden $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, vemos que $|x_i - x_j| \geq |i-j|$. Adicionalmente, como $c(k) = k-(n+1-k)$, entonces $c(k)$ y $x_k - x_{n+1-k}$ tienen el mismo signo, y además

$|x_k - x_{n+1-k}| \geq |c(k)|$.
Esto implica que

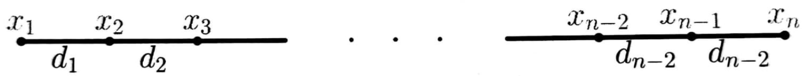
$$S = \sum_{k=1}^{n} c(k)(x_k - x_{n+1-k}) = \sum_{k=1}^{n} |c(k)| \cdot |x_k - x_{n+1-k}| \geq \sum_{k=1}^{n} (c(k))^2.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(c(k))^2 &= \sum_{k=1}^{n} 4k^2 - 4(n+1)k + (n+1)^2 \\ &= 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - 4(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n(n+1)^n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.\end{aligned}$$

La igualdad se puede alcanzar parra $x_i = i, i = 1, 2, \dots, n$.

Solución oficial 3. Al igual que en las soluciones anteriores, como la suma es simétrica podemos suponer que los números están ordenados como en el dibujo:



Por la condición del problema $d_i = |x_{i+1} - x_i| \geq 1$. Además, podemos escribir $\sum\sum |x_i - x_j| = 2\sum_{i<j} |x_i - x_j|$. Al calcular la suma total como $|x_i - x_j| = d_i + \cdots + d_{j-1}$, entonces el sumando d_k aparecerá siempre que $i \leq k \leq j-1$. Para cada k hay k posibles valores de i y hay $n-k$ posibles valores para j, así nos queda la suma:

$$\begin{aligned} A &= 2[1 \cdot (n-1) \cdot d_1 + \cdots + (n-1) \cdot (n-(n-1)) \cdot d_{n-1}] \\ &\geq 2[1 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot (n-(n-1))] \\ &= 2[(1 + 2 + \cdots + (n-1)n - (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)], \\ &= \frac{n^3 - n}{3} \end{aligned}$$

La igualdad es alcanzada si $1 = d_1 = \cdots = d_{n-1}$.

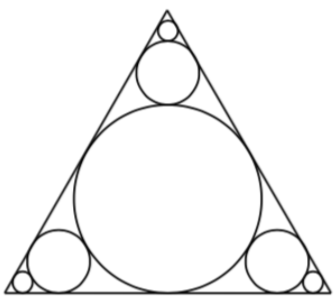
Competencia Internacional de Matemáticas 2023 (Nivel Secundaria)

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel Secundaria de la IMC del año 2023.

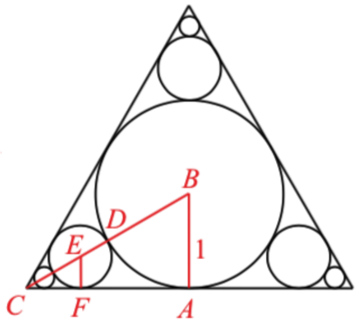
Problema 1. Sea x un número real y $y = \sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x}$. ¿Cuál es el mínimo valor posible de y^2? [Propuesto por Singapur]

Solución. Como $3x+4 \geq 0$ y $4-3x \geq 0$, se tiene que x debe satisfacer: $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$. Haciendo los cálculos, obtenemos que $y^2 = 8 + 2\sqrt{(3x+4)(4-3x)}$. Considerando sólo el valor positivo de la raiz cuadrada, se tiene que el mínimo se alcanza cuando $x = -\frac{4}{3}$ o $\frac{4}{3}$, y este valor mínimo es 8.

Problema 2. Un círculo de radio 1 cm se traza tocando los tres lados de un triángulo equilátero. Empezando desde ese círculo se dibujan tres secuencias infinitas de círculos menores en cada esquina del triángulo de forma que cada círculo es tangente al círculo previo y a dos de los lados del triángulo (como se ve en la figura de abajo). ¿Cuál es la suma de las circunferencias, en cm, de todos los círculos? [Propuesto por Nepal]



Solución 1. Como el triángulo es equilatero, cada ángulo vale 60°. Los triángulos ABC y FEC son rectángulos con $\angle ACB = 30^\circ$.



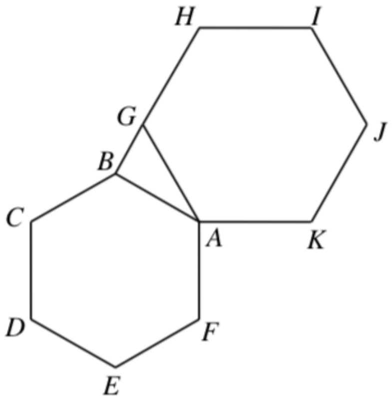
Entonces $\frac{EF}{CE} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, es decir, $CE = 2EF$ y $BC = 2AB = 2cm$.

Como $BC = BD+CD = 1+DE+CE = 1+EF+CE = 1+3EF$, $EF = \frac{BC-1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$. De aqui sabemos que el radio del primer círculo es $1cm$, el radio del segundo círculo es $\frac{1}{3}cm$, el del tercer círculo es $\frac{1}{9}cm$ y asi sucesivamente. Por lo tanto la suma de las circunferencias es:

$$2\pi\times 1+3\times 2\pi\times\frac{1}{3}+3\times 2\pi\times\frac{1}{27}+\cdots = 2\pi+6\pi(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots) = 2\pi+6\pi\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2} = 5\pi = 15.7cm$$

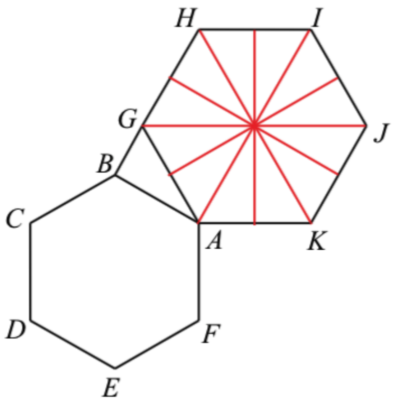
Solución 2. Como el triángulo es equilatero, cada ángulo vale 60°. Los triángulos ABC y FEC son rectángulos con $\angle ACB = 30^\circ$ entonces $BC = 2cm$. Observemos que el segmento CD consiste de los diametros de todos los círculos entre el círculo con centro en B y el vértice C (excepto para el círculo con centro en B), es decir, el diametro de estos círculos es $CD = BC - BD = 2 - 1 = 1cm$. Como hay tres de estos conjungos de círculos tangentes (uno por cada vértice del triángulo equilatero), la suma de los diametros de todos los círculos incluyendo el círculo con centro en B es $1 \times 3 + 2 = 5cm$, por lo que la suma de las circunferencias es $5\pi = 15.7cm$.

Problema 3. Sea $ABCDEF$ y $AGHIJK$ dos hexagonos regulares que no se traslapan, como se muestra en la figura. Asume que $\angle FAK = 90^\circ$ y que las áreas cumplen $3 \times [AGHIJK] = 4 \times [ABCDEF]$. ¿Cuál es el la razón $[ABG] : [AGHIJK]$? [Propuesto por México] (Nota: $[P]$ denota el área del poligono P.)



Solución.

La razón entre las áreas de los dos hexagonos es $3 : 4$. Por lo tanto la razón entre las longitudes de los lados es $\sqrt{3} : 2$. Es claro que el triángulo ABG es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ con hipotenusa AG. Dividiendo el hexagono regular $AGHIJK$ en 12 triángulos iguales, como se muestra en la figura, cada uno es congruente al trangulo ABG entonces $[ABG] : [AGHIJK] = 1 : 12$



Problema 4. El número de 53 dígitos:
$37, 984, 318, 966, 591, 152, 105, 649, 545, 470, 741, 788, 308, 402, 068, 827, 142, 719$ puede expresarse como n^{21}, donde n es entero positivo. ¿Cuánto vale n? [Propuesto por Tailandia]

Solución. Primero acotaremos el valor de n usando la cantidad de dígitos de n^{21}.

Observemos que $100^{21} = 10^{42} < n^{21} < 1000^{21} = 10^{63}$ esta desigualdad nos dice que cualquier número menor o igual a 100 elevado a la potencia 21, tendrá a lo más 43 dígitos, análogamente, cualquier número de 4 dígitos o más, tendrá al menos 64 dígitos, porl o cual n es un número de tres cifras.

Ahora observemos que $300^{21} = 3^{21} \times 10^{42} = 3 \times 9^{10} \times 10^{42} < 3 \times 10^{52} < n^{21}$ y $400^{21} = 4^{21} \times 10^{42} = 4 \times 16^{10} \times 10^{42} > 4 \times 10^{52} < n^{21}$, de lo anterior concluimos que $300 < n < 400$.

A continuación, trataremos de detirminar algunas caracteristicas del número. Analizando las terminaciones, podemos ver que n debe terminar en 9. Al conocer los dígitos, podríamos calcular algunos divisores, se puede verificar usando el criterio de once y como $3 - 7 + 9 - 8 + 4 - 3 + \cdots + 7 - 1 + 9 = 0$ que n es múltiplo de 11. Como n es múltiplo de 11, termina en 9 y esta entre 300 y 400, se concluye que $n = 319$.

Problema 5. Considera la ecuación $10y^2 - 9x^{2022} = y^4$, donde x, y son enteros. Si m es el máximo valor posible de $x + y$ y n es el número de soluciones (x, y), ¿cuál es el valor de $m + n$? [Propuesto por Indonesia]

Solución. Observemos que $(x, y) = (0, 0)$ es solución. La ecuación puede ser reescrita como $10y^2 + y^4 - 10y^2 + 25 = 25$, que es equivalente a la ecuación $(3x^{1011})^2 + (y^2 - 5)^2 = 25$.

Como x y y son enteros, entonces las posibles soluciones para la ecuación son: $(3x^{1011})^2 = 9$ y $(y^2 - 5)^2 = 16$.

De lo anterior, se tiene que $3x^{1011} = \pm 3$ y por lo tanto $x = 1$ o $x = -1$.

Como $(y^2 - 5)^2 = 16$, se tiene que $y^2 - 5 = \pm 4$ y por lo tanto $y = -3, -1, 1$ o 3.

El mayor valor de $x + y$ se encuentra con $x = 1$ y $y = 3$, esto nos da $m = 4$. El posible número de parejas (x, y) es $n = 1 + 8 = 9$. De todo lo anterior, tenemos que $m + n = 4 + 9 = 13$.

Problema 6. Sean a, b, c tres números reales diferentes de cero que satisfacen $a + b + c = 0$. ¿Cuál es el valor de $S = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$? [Propuesto por Vietnam]

Solución.

Lema. Si $a + b + c = 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Demostración: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$.

Podemos observar que

$a^4 - (b^2 - c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) = ((a + b)^2 - 2ab - c^2)((a + c)^2 - 2ac - b^2) = (c^2 - 2ab + c^2)(b^2 - 2ac - b^2) = 4a^2bc$

(Otra forma) $a^4 - (b^2 - c^2)^2 = a^4 - (b + c)^2(b - c)^2 = a^4 - (-a)^2(b - c)^2 = a^2(a + b - c)(a - b + c) = a^2(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2b) = a^2(-2c)(-2b) = 4a^2bc$.

Por lo tanto, se tiene que $\frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} = \frac{a^4}{4a^2bc} = \frac{a^3}{4abc}$. Análogamente se tiene que $\frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} = \frac{b^3}{4abc}$ y $\frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2} = \frac{c^3}{4abc}$.

De lo anterior, $S = \frac{a^3}{4abc} + \frac{b^3}{4abc} + \frac{c^3}{4abc} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} = \frac{3abc}{4abc} = \frac{3}{4}$.

Problema 7. Si un número pude expresarse como $2^a + 2^b$, donde a y b son enteros no negativos y $a \neq b$, entonces este número se llama “número suertudo”. Supongamos que todos los números suertudos están listados en orden creciente. ¿Cuál es el 64° número suertudo? [Propuesto por China]

Solución.

Observemos que los números suertudos son aquellos que tienen exactamente dos dígitos 1 en el sistema denúmeración base dos. A continuación los listamos los primeros números suertudos en orden:
El 1er número suertudo es $11_2 == 2^1 + 2^0 = 3$,
el 2° número suertudo es $101_2 = 2^2 + 2^0 = 5$,
el 3° número suertudo es $110_2 = 2^2 + 2^1 = 6$,
el 4° número suertudo es $1001_2 = 2^3 + 2^0 = 9$,
el 5° número suertudo es $1010_2 = 2^3 + 2^1 = 10$,
el 6° número suertudo es $1100_2 = 2^3 + 2^2 = 12$,
el 7° número suertudo es $10001_2 = 2^4 + 2^0 = 17$

Así sucesivamente. Para encontrar el 64 número suertudo, necesitamos confirmar el número de dígitos (en binario) de dicho número. Observemos que de dos dígitos hay 1, de tres dígios hay 2, de cuatro dígitos hay 3, etc. Por lo tanto, si $m + 1$ es el número de dígitos del número suertudo buscado, entonces:

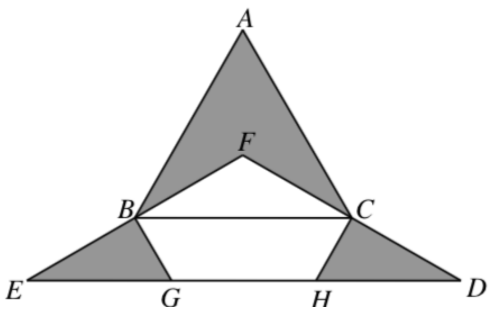
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1) \leq 64 \leq 1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1) + m$$

$$\frac{m(m-1)}{2} \leq 64 \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

$$m(m-1) \leq 128 \leq m(m+1)$$

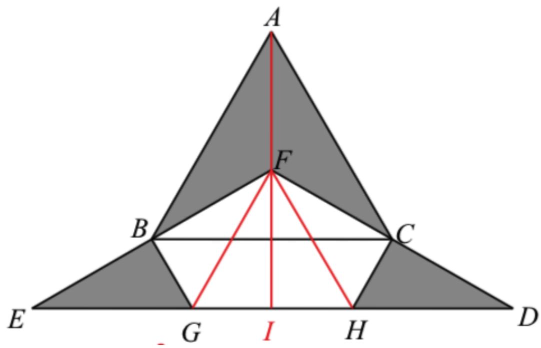
Podemos ver que con $m = 11$ se satisfacen las desigualdades. Como $\frac{11\times 12}{2} = 66$, por lo tanto:
el 66° número suertudo es $110000000000_2 = 2^{11} + 2^{10} = 17$,
el 65° número suertudo es $101000000000_2 = 2^{11} + 2^9 = 17$,
el 64° número suertudo es $100100000000_2 = 2^{11} + 2^8 = 2304$.

Problema 8. Sea ABC un triángulo equilátero cuya área es 36 cm^2, y EFD un triángulo isósceles con $EF = FD$. El punto F es el centro del triángulo ABC, y los puntos B y C son puntos medios de EF y FD, respectivamente, como se muestra en la figura. Si $BG \perp EF$ y $CH \perp DF$, ¿cuál es el área (en cm^2) de la región sombreada? [Propuesto por Indonesia]



Solución. Como F es el centro de ABC entonces $\angle EFD = 120^\circ$ y $\angle FDE = \angle FED = 30^\circ$. Dibujando la línea AI que pasa por F tal que $AI \perp ED$, Dibujamos los segmentos FG y FH. Como $BG \perp EF$, $CH \perp DF$, $EB = BF$ y $FC = CD$, observamos que BEG, BGF, CFH y CDH son congruentes y son triángulos rectángulos de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Más aún, los triángulos FGI y FIH son tambien triángulos rectángulos de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, los cuales son congruents con BEG, BGF, CFH y CDH por lo que el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{6}(EFD)$.

Como F es el centro de ABC, $(ABFC) = \frac{2}{3}(ABC)$ y $(BCF) = \frac{1}{3}(ABC)$. Además, ya que $BC \parallel ED$ y $EB = BF$, $FC = CD$, se tiene que $(EFD) = 4 \times (BCF) = \frac{4}{3}(ABC)$.



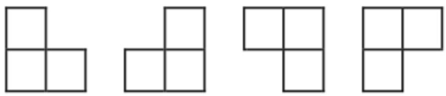
$$\begin{aligned}
(BGE) + (CDH) &= \frac{1}{6}(EFD) + \frac{1}{6}(EFD) \\
&= \frac{1}{3}(EFD) = \frac{4}{9}(ABC) \\
\text{Área de la región sombreada} &= (ABFC) + (BGE) + (CDH) \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)(ABC) = \frac{10}{9}(ABC) \\
&= \frac{10}{9}(36) = 40 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Problema 9. Una empresa muy secreta desarrolla una máquina de alta tecnología. Hay 20 diferentes planos que se necesitan para construirla. Cada empleado tiene acceso a exactamente 5 planos diferentes y cada combinación de 5 planos diferentes es accesible al menos a un empleado. El director de la empresa quiere distribuir a los empleados en departamentos de forma que ningún departamento pueda construir la máquina por sí mismo. Es decir, no debe haber ningún departamento donde cada plano sea accesible por alguno de sus miembros. ¿Cuáles la mínima cantidad d departamentos que el director necesita crear? [Propuesto por Rusia]

Solución. Supongamos que no hay más de 5 departamentos. Para cada departamento, elegimos un plano al que no puede acceder, de esta forma elegimos 5 planos n total. Si hay menos de 5 departamentos o alguno de los planos elegidos es el mismo, elegimos un plano de manera aleatoria para tener 5. De esta forma, la persona que tiene acceso a estos 5 planos no puede trabajar en ninguno de estos departamentos, de esta forma vemos que no es posible tener 5 departamentos o menos.

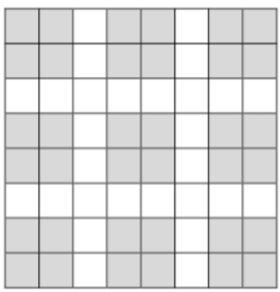
Si hay 6 departamentos, el director puede enviar a los empleados que no tienen acceso al primer plano al primer departamento, los que no tienen acceso al segundo plano al segundo departamento y así sucesivamente hasta tener 5 departamentos, el resto de los empleados son aquellos que tienen acceso a los 5 planos seleccionados y todos ellos son enviados al último departamento.

Problema 10. Un V-Triminó está formado por tres cuadritos de 1×1, como se muestra en la figura:



Si los V-Triminós deben estar alineados con las casillas de un tablero, ¿cuál es la mínima cantidad que se necesitan colocar en un tablero de 8×8 de forma que no se pueda colocar un cuadrado de 2×2 en el espacio restante? [Propuesto por Singapur]

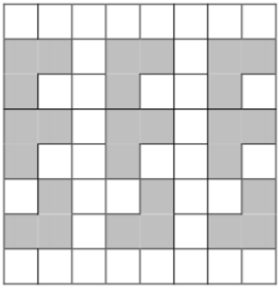
Solución. Coloreando el tablero de 8×8 como sigue,



es claro que cada V-triminó puede ser puesto en a lo más un cuadrado sombreado de 2×2, entonces necesitamos al menos 9 de estas fichas.

Hay varias formas de mostrar que con 9 V-triminós se puede, por ejemplo:

Cajas	1	2	3	...	8	9	10	11	...	17
Paso 1	2^0	2^1	2^2	...	2^7	2^8	0	0	...	0
Paso 2	2^0	2^1	2^2	...	2^7	0	2^8	0	...	0
Paso 3	2^1	2^2	2^3	...	0	0	0	2^8	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Paso 9	2^7	0	0	...	0	0	0	0	...	2^8



Problema 11. Hay 17 cajas vacias y una cantidad infinita de pelotas. En cada paso elegimos algunas cajas y ponemos en cada caja una diferente cantidad de pelotas, donde cada cantidad debe ser una potencia de dos (incluyendo dos a la potencia cero). Después de k pasos, es posible que que todas las cajas tengan la misma cantidad (diferente de cero) de pelotas dentro. ¿Cuál es el menor entero positivo k para lograr esto?.

Solución.

Observación: Para cada n enteros diferentes y no negativos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ se tiene que

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} \leq 2^{a_n+1} - 1$$

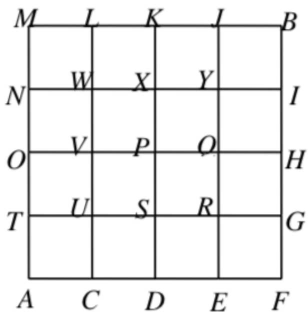
Sea 2^m el mayor número de pelotas colocadas en una caja en cada paso. En cada paso, el total de pelotas usadas en ese turno es a lo más $2^{m+1} - 1$. Por otro lado, al final, cada caja debe contener al menos 2^m pelotas. Entonces:

$$17 \times 2^m \leq k(2^{m+1} - 1) < k \times 2^{m+1} = 2k \times 2^m$$

De esto, $k \geq 9$. Mostraremos una secuencia de 9 pasos como sigue:

Después de 9 pasos, las 17 cajas tendrán $2^8 = 256$ pelotas.

Problema 12. El diagrama muestra un laberinto en la forma de cuadícula de 4×4. Una serpiente, inicialmente en la posición P, se mueve siguiendo el trayecto $P{-}Q{-}R{-}S$ en un ciclo. Un ratón, inicialmente en la posición A, quiere llegar al punto B, moviéndose por el laberinto. El ratón puede solo moverse verticalmente hacia arriba y horizontalmente a la derecha. Si la serpiente y el ratón alcanzan la misma posición al mismo tiempo, la serpiente se comerá al ratón; además si los dos se cruzan en un camino, la serpiente se comerá al ratón (ambos se mueven a la misma velocidad). Dado que el ratón y la serpiente empiezan a moverse al mismo tiempo, ¿cuál es la cantidad de caminos seguros para que el ratón se mueva d A a B? (Por ejemplo, $A-C-D-E-R-G-H-I-B$ es un camino seguro para el ratón, ya que cuando el ratón llegue al punto R, la serpiente estará en el punto P).



Solución. Es fácil ver que después de $4k$, $4k+1$, $4k+2$ y $4k+3$ movimientos, la serpiente llegará a las posiciones P, Q, R y S resepctivamente (donde $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Por lo tanto, si el ratón llega a P en $4k$ movimientos, será comido por la serpiente. Observemos que pasa lo mismo si llega a Q, R y S en $4k+1$, $4k+2$ y $4k+3$ movimientos respectivamente.

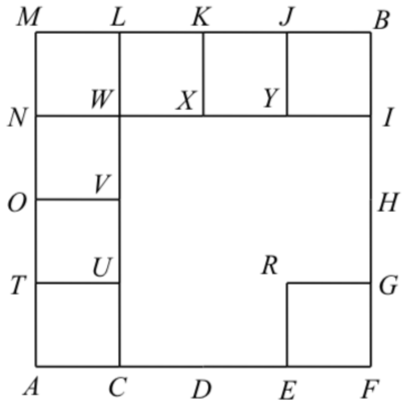
El ratón puede llegar a S solo de tres formas ($A-C-D-S$, $A-C-U-S$, $A-T-U-S$) y cada uno requiere tres movimientos, por lo tanto esos caminos deben ser evitados, ya que la serpiente tomará 3 movimientos para llegar a S.

De forma similar, el ratón puede llegar a P de tres formas ($A-T-U-V-P$, $A-T-O-V-P$, $A-C-U-V-P$), excluyendo los caminos antes considerados que pasan por S. pero estos caminos requieren 4 movimientos y por lo tanto la serpiente comerá al ratón.

Ahora analicemos los caminos que pasan por R. Si excluimos los caminos que pasan por S, observemos que ($A-C-D-E-R$) es el único camino de A a R, el cual requiere 4 movimientos y que es seguro para el ratón, ya que la serpiente estará en P cuando el ratón llegue a R.

Ahora, si el ratón se mueve de R a Q, la serpiente lo comerá y por lo tanto al llegar a R solo le queda ir a B pasando por G.

Observemos que todos los caminos de A a Q pasan por P, R o S. Por lo tanto, el siguiente diagrama muestra formas en que el ratón puede ir de forma segura.



Para contar el número total de caminos seguros, observemos que cualquier de ellos debe pasar por M, E o W.

Solo el camino $(A-T-O-N-M-L-K-J-B)$ pasa por M. Por E solo pasan $(A-C-D-E-F-G-H-I-B)$ y $(A-C-D-E-R-G-H-I-B)$.

El total de caminos que pasan por W es igual al numero de caminos de A a W por el número de caminos de W a B, esto es 16 caminos.

Por lo tanto hay en total $3+16=19$

Sección B

Problema 13. ¿Cuál es la cantidad de soluciones en números reales de la ecuación $x^2-8[x]+7=0$? Nota: $[x]$ denota el mayor entero que no es mayor que x. Por ejemplo, $[3.14]=3$ y $[-3.14]=-4$.

Solución 1. Si $x<1$, entonces $[x]\le 0$ y entonces $x^2-8[x]+7>0$ y concluimos que la ecuación no tiene soluciones en el dominio de los números reales.

Ahora podemos asumir que $x\ge 1$ y sea $[x]=n$, donde n es un entero positivo. De este modo, $x^2-8n+7=0$ por lo que $x=\sqrt{8n-7}$.

Como $[x]<x<[x]+1$ entonces $n\le\sqrt{8n-7}<n+1$ obteniendo asi que $n^2\le 8n-7<n^2+2n+1$.

De lo anterior se tiene que se deben satisfacer $n^2-8n+7\le 0$ y $n^2-6n+8>0$.

La primer desigualdad nos da que $1\le n\le 7$ y la segunda nos da que $n<2$ o $n>4$. De esto se tiene que n solo puede tomar los valores de 1, 5, 6 o 7. Por lo que solo se tienen 4 soluciones que son $1,\sqrt{33},\sqrt{41},7$.

Solución 2. Como $[x]<x<[x]+1$ entonces se debe tener

$$x^2-8x+7\le x^2-8[x]+7=0<x^2-8(x+1)+7=x^2-8x+15.$$

Si $x^2-8x+7\le 0$ se tiene que $1\le x\le 7$. Si $x^2-8x+15>0$ se tiene que $x\le 3$ o $x>5$.

De las desigualdades anteriores para x se tiene que x debe satisfacer $1 \leq x < 3$ o $5 < x \leq 7$. Por lo que solo necesitamos verificar los casos en que $[x] = 1, 2, 5, 6$ y 7.

Sustituimos $[x]$ y hallamos el valor de x, el cuál debe satisfacer que al calcular $[x]$ debe arrojar el valor sustituido, al hacerlo observamos que solo $[x] = 1, 5, 6$ y 7 lo satisfacen, por lo tanto se tienen 4 soluciones.

Problema 14. Considera un hexágono regular. Paul desea pintar cada vértice del hexágono de verde, rojo o azul, de manera que no haya vértices vecinos pintados del mismo color. ¿De cuántas formas diferentes puede Paul pintar los vértices?

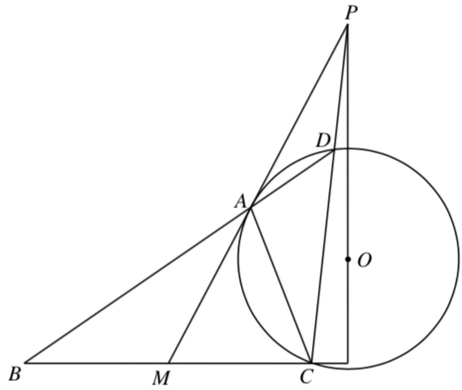
Solución. Como hay seis vértices y tres colores, un color debe ser usado tres veces o cada color debe ser usado dos veces exactamente.

Caso 1: Si un color aparece tres veces. Numerando los vértices del hexágono, observamos que dicho color debe ocupar los vértices pares o impares. Consideramos dos subcasos, cuando se usan dos colores y cuando se usan tres. Si se usan solo dos colores, hay 2×3 formas de colorear, ya que los vértices pares tienen 3 posibilidades y los impares tendrán solo 2. Cuando se usan los tres colores, hay 2 opciones para seleccionar los tres vértices que llevarán el mismo color, los pares o los impares y tres formas para elegir el color de estos. De esta forma, deben haber dos vértices con un color y el otro con el restante, de aqui que se tiene 2 posibilidades para elegir el color que aparece una vez y tres posibilidades para elegir el vértice con ese color. De esta forma, el total de formas será $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$. Para este caso hay un total de $6 + 36 = 42$ formas.

Caso 2: Cuando cada color aparece 2 veces, también se considerarán dos subcasos. Cuando los vértices 1 y 4 son del mismo color y cuando 1 es del mismo color de 3 o 5. En el primer subcaso, hay tres formas de elegir el color que irá en 1 y 4, en este caso, observamos que como 2 y 3 no pueden ser del mismo color, entonces 2 debe ser del mismo color que 5 o 6, eso último determina el color de los dos restantes, en este caso hay $3 \times 2 \times 2 = 12$ posibilidades. Observemos que los casos cuando 1 y 3 tienen el mismo color es análogo a cuando 1 y 5 tienen el mismo color, por lo tanto contaremos uno de ellos y lo duplicaremos. Hay tres posibilidades para el color que irá en 1 y 5, observamos que falta colorear los vértices 2,3,4 y 6, pero dos de los vértices 2,3 y 4 deben ser del mismo color, pero no deben ser consecutivos, por lo tanto 2 y 4 deben ser del mismo color y lo mismo sucede con 3 y 6, de esto se concluye que se puede hacer de $2 \times 3 \times 2 = 12 \textit{posibilidades}$. El total del caso serán $12 + 12 = 24$ posibilidades.

Por todo lo anterior, en total hay $42 + 24 = 66$ posibilidades.

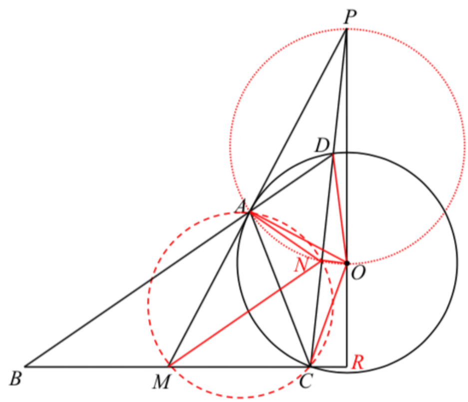
Problema 15. En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC. Trazamos el círculo con centro en O que pasa por los puntos A, C y es tangente a la línea AM. La prolongación de BA interseca al círculo en D y la prolongación de CD interseca a la prolongación de MA en el punto P, como se muestra en la figura. Demuestra que $OP \perp BC$.



Solución. Sea N el punto medio de CD, entonces, $CN = DN$. Como M es el punto medio de BC, se tiene que $MN \parallel BD$ y entones $\angle BDC = \angle MNC$.

Como AM es tangente al círculo O, con ángulos alternos en el triángulo ADC y la línea AMse tiene que $\angle MAC = \angle BDC = \angle MNC$ y $\angle DAP = \angle DCA$. Por eso, A, M, C y N forman un cuadrilátero cíclico y $\angle ANM = \angle ACM = \angle DAN$.

Dibujando las líneas AO, AN, NO, DO y CO. Como DO y CO son radios del círculo O y $CN = DN$, se tiene que $\angle DNO = \angle CNO = \angle PNO = 90^\circ$.



Como $AO \perp AM$ se tiene que $\angle PAO = 90^\circ$. Observemos que los triángulos PAO y PNO comparten el segmento OP y $\angle PAO = \angle PNO = 90^\circ$, se puede concluir que A, N, O y P forman un cuadrilátero cíclico.

Como A, N, O y P son cíclicos, entonces:

$$\begin{aligned}
\angle PAN + \angle PON &= 180^\circ \\
\angle DAP + \angle DAN + \angle PON &= 180^\circ \\
\angle PON &= 180^\circ - (\angle DAP + \angle DAN) \\
&= 180 - (\angle DCA + \angle ACM) = \angle PCR
\end{aligned}$$

De esto se tiene que los triángulos PON y PCR sean semejantes con $\angle PNO = \angle PRC = 90^\circ$ y esto muestra que $OP \perp BC$.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.

Definición 2 (Congruencias)**.** Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.

2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.

3. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.

4. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.

Teorema 2 (Pequeño Teorema de Fermat)**.** Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 3 (Inducción)**.** El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:

1. Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.

2. Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.

3. Paso inductivo: XSe demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.

Teorema 5 (Combinaciones). Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio de Newton). Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Teorema 9 (Pitágoras). En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Definición 3 (Congruencia de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Teorema 10 (Criterio de congruencia LLL). Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.

Teorema 11 (Criterio de congruencia ALA). Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.

Definición 4 (Semejanza de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema 12 (Criterio de semejanza AA)**.** Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.

Teorema 13 (Tales)**.** Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 14 (Bisectriz)**.** Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 15 (Ceva)**.** Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.

Teorema 16 (Menelao)**.** En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.

2. Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.

3. Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito)**.** La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 18 (Medida del ángulo seminscrito)**.** La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$.

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental. México, 1972.

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864